



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**  
**Facultad de Letras y Ciencias Humanas**  
**Programa Académico de Filosofía**

**Un procedimiento decisorio para fórmulas  
cuantificacionales monádicas de la lógica de primer  
orden**

**TESIS**

**Para optar el Grado Académico de Bachiller en Filosofía**

**AUTOR**

**Marino LLANOS VILLAJUAN**

**Lima, Perú**

**1974**



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.



## Referencia bibliográfica

---

Llanos, M. (1974). *Un procedimiento decisorio para fórmulas cuantificacionales monádicas de la lógica de primer orden*. [Tesis de bachiller, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Letras y Ciencias Humanas, Programa Académico de Filosofía]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

---

FI 39  
UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

PROGRAMA ACADEMICO DE FILOSOFIA



UN PROCEDIMIENTO DECISORIO PARA FORMULAS  
CUANTIFICACIONALES MONADICAS DE LA LOGICA  
DE PRIMER ORDEN

TESIS

PARA OPTAR EL GRADO DE BACHILLER EN  
FILOSOFIA

MARINO LLANOS VILLAJUAN

---

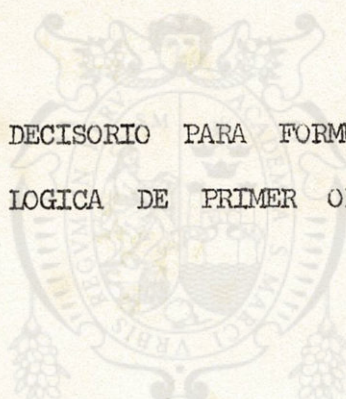
LIMA - PERU

1974



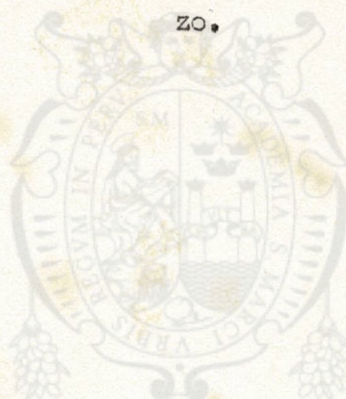


UN PROCEDIMIENTO DECISORIO PARA FORMULAS CUANTIFICACIONALES  
MONADICAS DE LA LOGICA DE PRIMER ORDEN





A mis queridos padres Pedro -  
Llanos A. y Agustina Villajuan  
M., por su infatigable esfuer-  
zo.











Fi  
39

## INTRODUCCION

En la lógica y en las matemáticas hay dos tipos de problemas en cuanto se refiere a su solución: los que admiten alguna solución y los que no admiten ninguna. Los problemas del primer tipo, en cuanto se refiere a la manera de resolverlos, se dividen a su vez, en dos clases: problema para los cuales existen métodos de solución mecánica e infalible, y problemas para los cuales no existen tales métodos. De este modo, por una parte, existen en las lógica y en las matemáticas, cierto tipo de problemas cuya solución no depende de ningún factor subjetivo del investigador, tales como, la agudez o la ingeniosidad, sino, dependen entera y únicamente de algún método que consiste en un número mínimo posible de reglas muy precisas, que aplicadas correctamente a un determinado tipo de problemas, siempre conduce a una respuesta afirmativa o negativa, en un tiempo mínimo posible. Tales métodos reciben el nombre de "procedimiento decisorio", "método efectivo" o "algoritmo", y a los problemas para los cuales existen tales métodos, se les conoce con el nombre de problemas decidibles, y de otro modo, se dice que son indecidibles. Por otra parte, para todo problema decidible, dado un procedimiento decisorio, siempre es posible construir un método equivalente o variante de dicho procedimiento y, por tanto, para todo problema decidible existe cuando menos más de una solución equivalente.

El propósito de la presente tesis -si es que no está errada- no es otra cosa que la de ofrecer una variante o equivalente más de tales métodos efectivos existentes para cierto tipo de problemas en la lógica. Es decir, lo que se pretende, de una manera modesta y sencilla, es simplemente, ofrecer un procedimiento decisorio para la resolución de la validez lógica de fórmulas cuantificacionales monádicas de la Lógica de Primer Orden. No se podría hacer más en este respecto en la lógica, pues, desde que A. Church sentó de una vez por todas su famosa tesis, al parecer cualquier otro camino o posibilidad original ha quedado totalmente cerrada definitivamente. En este sentido, lo que dice G. Hunter, hablando acerca de cuestiones análogas es también válido para el presente caso: "...I believe that the logician's most urgent tasks at present lie the field of non-standard logic"(1) es bastante acertado.



La estructura expositiva de la presente tesis es como sigue. Consta de dos partes. En la primera parte, por un lado, se presenta a las reglas decisorias para las fórmulas cuantificacionales monádicas de la Lógica de Primer Orden, y un número suficiente de ejemplos sobre la aplicación de cada una de dichas reglas; por otro lado, se presenta cierta aclaración terminológica, y conforme se va avanzando con la exposición a las reglas, se presenta la definición de ciertos conceptos básicos, necesarios para la comprensión de esta primera parte, y que además, algunas de ellas serán usados a lo largo de toda la tesis. En la segunda parte se presenta a la fundamentación de las reglas decisorias presentadas en la primera parte. Ello consiste, en la demostración de seis teoremas correspondientes a las seis formas básicas a las que se reduce toda fórmula cuantificacional de la Lógica de Primer Orden.

Ciertas ideas y sugerencias que encaminaron al graduando a construir el procedimiento decisorio propuesto en esta tesis tienen dos fuentes de origen. Primero, en los elementales pero sólidos conocimientos recibidos por el graduando cuando era alumno del curso de Lógica II, debido a la atención especial que se presta a los procedimientos decisorios en dicha asignatura, y a las sugerencias recibidas de la lectura de la tesis doctoral del Dr. J. B. Ferro. Segundo, ciertas ideas debidas al intento de investigar por el graduando el problema de la imposibilidad de decidir la validez de fórmulas cuantificadas únicamente con el auxilio de los métodos proposicionales, a raíz de ciertas sugerencias del procedimiento decisorio de W.V.O. Quine (2). Por su puesto, que es preciso reconocer también, que los conocimientos y demás sugerencias provenientes de los otros profesores de lógica y disciplinas afines, constituyeron una base necesaria para el labor del graduando, sin el concurso de los cuales, no se hubiera podido hacer nada.

- 
- (1) Hunter, Geoffrey. METALOGIC. An Introduction to the Metatheory of Standard First-Order-Logic. Macmillan, London, 1971.
- (2) Quine, Willard V. O. Los Métodos de la Lógica. Ariel, Barcelona, 1969.



Es preciso, pues, insistir que lo que se pretende en la presente tesis, es simplemente, demostrar que el método propuesto en ella, es decisivo para el tipo de fórmulas indicadas hace un momento. Por lo tanto, toda la suerte del graduando dependerá únicamente, de si es, o no es decisivo tal método.







PRIMERA PARTE

REGLAS DECISORIAS PARA LAS FORMULAS CUANTIFICACIONALES MONA-  
DICAS DE LA LOGICA DE PRIMER ORDEN



## 1.- REGLAS DECISORIAS PARA LAS FORMULAS BASICAS

Una fórmula monádica básica de la lógica de Primer Orden es - una fórmula de la forma  $Q_1 A_1, \dots, Q_n A_n, 1 \leq i \leq n$ , donde cada  $Q_i$  es o un  $(x)$  o un  $(Ex)$ , y  $A_i$  no contiene ningún cuantificador ni variable individual alguna que no sea la que aparezca en  $Q_i$ , ni algún signo de igualdad. De este modo, una fórmula básica es, o una fórmula universal, o una fórmula existencial, o una serie finita de fórmulas universales, o una serie finita de fórmulas existenciales o una combinación finita de fórmulas universales y existenciales, coligadas entre si por conectivas proposicionales. Además, dentro o fuera de algún operando  $A_i$  puede aparecer una o más letras proposicionales.

Antes de presentar las reglas decisorias para este tipo de fórmulas, es necesario explicar brevemente el significado de ciertas expresiones técnicas que se usarán en lo sucesivo a lo largo de esta tesis. Aunque la mayoría de estas expresiones son ya bastante conocidas en la literatura lógica, no sería por demás aclarar lo que ellos significan en este contexto.

a) Al hablar acerca de un  $Q_i$  cualquiera, en lugar de usar las expresiones "cuantificador universal" o "cuantificador existencial" usaremos simplemente las expresiones abreviadas "U-cuantificador" y "E-cuantificador", respectivamente.

b) Al hablar acerca de una  $Q_i A_i$  cualquiera, esto es, de una fórmula básica, en lugar de usar las expresiones "fórmula universal" o "fórmula existencial", emplearemos las expresiones abreviadas "U-fórmula" y "E-fórmula", respectivamente.

c) Al hablar acerca de un operando (o matriz)  $A_i$  cualquiera, en lugar de emplear las expresiones "operando de una fórmula universal" u "operando de una fórmula existencial", emplearemos las expresiones abreviadas "U-operando" y "E-operando", respectivamente. Finalmente,

d) Al hablar acerca de esquemas constituidas por letras predicados (con o sin subíndices) y conectivas proposicionales, resultantes de borrar a los cuantificadores y variables individuales, en fórmulas básicas, en lugar de usar las expresiones "esquema de una fórmula existencial", usaremos las expresiones abreviadas "U-esquema" y "E-esquema", respectivamente. Y además, a estos





Ahora si, presentamos a las reglas decisorias para las fórmulas básicas.

RB. Sea  $S$  una fórmula cuantificacional monádica de la Lógica de Primer orden, cerrada y básica, sin signos de igualdad, con letras proposicionales o sin ellas. Para determinar la validez de esta fórmula, elimínese previamente a todas las conectivas " $\rightarrow$ ", " $\leftrightarrow$ ", etc., sustituyendo por sus equivalente correspondientes, hasta reducir a otra fórmula equivalente  $S'$ , tal que ésta última exhiba únicamente las conectivas " $\vee$ ", " $\cdot$ " y/o " $\sim$ ", internada esta última. Ahora bien, - una vez conseguida  $S'$ , ésta tendrá cualesquiera de las siguientes formas:

- I.  $(x) A_1, \dots, (x) A_m$
- II.  $(Ex) B_1, \dots, (Ex) B_n$
- III.  $(x) A_1, \dots, (x) A_m' (Ex) B_1, \dots, (Ex) B_n$

es decir, una serie finita de U-fórmulas, o una serie finita de E-fórmulas, o de ambas a las vez, donde  $m$  y  $n$  son enteros positivos finitos arbitrarios. Las reglas para decidir la validez de cada una de estas fórmulas así reducidas son las siguientes:

R<sub>1</sub>. Si  $S'$  es de la forma  $(x)A_1, \dots, (x) A_m$ :

(1) Si el número de los U-cuantificadores es  $\leq 1$ , bórrese simplemente al U-cuantificador y a las variables individuales y, luego determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante.

(2) Si el número de los U-cuantificadores es  $\leq 2$ , bórrese a todos los U-cuantificadores y variables individuales y, luego, adscribáse un mismo subíndice a todas las letras predicados de cada U-esquema  $A_i$  distinto de otro  $A_j$ , y finalmente, determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante.

R<sub>2</sub>. Si  $S'$  es de la forma  $(Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n$ , bórrese a todos los E-cuantificadores y variables individuales, y luego determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante.

R<sub>3</sub>. Si  $S'$  es de la forma  $(x)A_1, \dots, (x)A_m, (Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n$ :



- A) Si el número de los U-cuantificadores es  $\leq 1$ : se procede en forma idéntica al R2.
- B) Si el número de los U-cuantificadores es  $\leq 2$ , procédase sucesivamente como sigue:
- (1) Siempre que se considere conveniente y sea posible, para mayor simplicidad, redúzcase el número de los U- y E-cuantificadores empleando las equivalencias  $(x)A_1 \dots (x)A_m \cdot \longleftrightarrow \cdot (x)(A_1 \dots A_m)$  y  $(Ex)B_1 \vee \dots \vee (Ex)B_n \cdot \longleftrightarrow \cdot (Ex)(B_1 \vee \dots \vee B_n)$ .
  - (2) Hállese la forma normal conjuntiva, tomando a cada U- y E-fórmula en bloque como si fueran simples letras proposicionales.
  - (3) Bórrese que todos los cuantificadores y variables individuales y, luego:
    - (3.1) En cada miembro de la FNC, que contenga la disyunción de U- y E-esquemas, si el número de los U-esquemas es  $\leq 2$ , sustitúyase a cada E-esquema  $B_i$  por la disyunción de  $m$  miembros  $B_i \vee \dots \vee B_{in}$  y, luego a todas las letras predicados de cada par de fórmulas  $(A_i, B_i)$  adscribáse un mismo subíndice, usando un subíndice distinto para cada par que difiera en el U-componente. De otro modo, si el número de los U-esquemas es  $\leq 1$ , procédase en forma similar a A).
    - (3.2) En los demás miembros de la FNC, procédase simplemente conforme a R1 o R2, según sea el caso. En la práctica todo el paso (3) se efectúa simultáneamente de un modo, en cualesquiera de las formas I - III de S', ésta será 1-válida sss su esquema S'<sub>p</sub> correspondiente es tautológicamente válido.



ALGUNOS EJEMPLOS DE LA APLICACION DE ESTAS REGLAS

EJEMPLO SOBRE LA FORMA I.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad S \quad & \sim (x) (Fx.Gx. \longrightarrow Gx) . (Ex) Hx. \longrightarrow . (x) (HxvFx) \\
 & \sim (\sim (x) (Fx.Gx. \longrightarrow Gx) . (Ex) Hx) v (x) (HxvFx) \\
 & (x) (Fx.Gx. \longrightarrow Gx) v \sim (Ex) Hx. v. (x) (HxvFx) \\
 & (x) (\sim (Fx.Gx) v Gx) v (x) \sim Hx. v. (x) (HxvFx) \\
 S' \quad & (x) (\sim Fxv \sim GxvGx) v (x) \sim Hx. v. (x) (HxvFx) \\
 m = 3: \\
 & (\sim F_1 v \sim G_1 v H_1) v \sim H_2. v. (H_3 v F_3)
 \end{aligned}$$

S es válida.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad S \quad & (Ex) (Fxv \sim Hx) . (Ex) (\sim Gx.Dx) \longrightarrow . (x) (FxvDx) \\
 & \sim ((Ex) (Fxv \sim Hx) . (Ex) (\sim Gx.Dx)) v (x) (FxvDx) \\
 & \sim (Ex) (Fxv Hx) v \sim (Ex) (\sim Gx.Dx) . v . (x) (FxvDx) \\
 & (x) \sim (Fxv \sim Hx) v (x) \sim (\sim Gx.Dx) . v. (x) (FxvDx) \\
 S' \quad & (x) (\sim Fx.Hx) v (x) (Gxv \sim Dx) . v. (x) (FxvDx) \\
 m = 3: \\
 & (\sim F_1 . H_1) v (G_2 v \sim D_2) v (F_3 v D_3) \\
 & F_1 v G_2 v \sim D_2 v F_3 v D_3 . H_1 v G_2 v \sim D_2 v F_3 v D_3
 \end{aligned}$$

S no es válida

$$\begin{aligned}
 (3) \quad S \quad & (Ex) (Fx \longrightarrow Hx.v.Fx \longrightarrow Gx) . (Ex) \sim Fx. \longrightarrow (x) \\
 & (Fx . \longrightarrow) . HxvFx) . \\
 & \sim ((Ex) (Fx \longrightarrow Hx.v.Fx \longrightarrow Gx) . (Ex) \sim Fx)) v (x) \\
 & (Fx. \longrightarrow) HxvFx) \\
 & \sim (Ex) (Fx \longrightarrow Hx.v.Fx \longrightarrow Gx) v \sim (Ex) \sim Fx.v.(x) \\
 & (Fx . \longrightarrow) . HxvFx) . \\
 & (x) \sim (Fx \longrightarrow Hx .v. Fx \longrightarrow Gx) v (x) Fx .v. (x) \\
 & (Fx . \longrightarrow) . HxvFx) \\
 & (x) (\sim (Fx \longrightarrow Hx) . \sim (Fx \longrightarrow Gx)) v (x) Fx.v. \\
 & (x) (Fx . \longrightarrow) . HxvFx) \\
 S' \quad & (x) (Fx . \sim Hx. Fx . \sim Gx) v (x) Fx.v (x) (FxvHxvFx) \\
 m = 3: \\
 S'p \quad & (F_1 . \sim H_1 . \sim G_1) v F_2 .v. (\sim F_3 v H_3 v F_3)
 \end{aligned}$$

T



- (4) S  $(Ex) Fxv (Ex) Gxv (Ex) Hx \cdot \longrightarrow \cdot (x) (FxvGxvHx)$   
 $\sim((Ex) Fxv (Ex) Gxv (Ex) Hx) \vee (x) (FxvGxvHx)$   
 $\sim(Ex) Fx \cdot \sim(Ex) Gx \cdot \sim(Ex) Hx \cdot v. (x) (FxvGxvHx)$   
 S'  $(x) \sim Fx. (x) \sim Gx. (x) \sim Hx \cdot v. (x) (FxvGxvHx)$   
 $m = 4:$   
 S'p  $\sim F_1 \cdot \sim G_2 \cdot \sim H_3 \cdot v. (F_4 \vee G_4 \vee H_4)$   
 $\sim F_1 \vee F_4 \vee G_4 \vee H_4 \cdot \sim G_2 \vee F_4 \vee G_4 \vee H_4 \cdot \sim H_3 \vee F_4 \vee G_4 \vee H_4$   
 S no es válida.
- (5) S  $(Ex) (Fx.Gx.Hx.Dx) \cdot \longrightarrow \cdot (x) Fxv (x) \sim Gxv (x)$   
 $\sim Hxv (x) Dx$   
 $\sim(Ex) (Fx.Gx.Hx.Dx) \cdot v. (x) Fxv (x) \sim Gxv (x) \sim Hxv$   
 $(x) Dx$   
 $(x) \sim (Fx.Gx.Hx.Dx) \cdot v. (x) Fxv (x) \sim Gxv (x) \sim Hxv$   
 $(x) Dx$   
 S'  $(x) (\sim Fxv \sim Gxv \sim Hxv \sim Dx) \cdot v. (x) Fxv (x) \sim Gxv (x)$   
 $\sim Hxv (x) Dx$   
 $m = 5:$   
 S'p  $(\sim F_1 \vee \sim G_1 \vee \sim H_1 \vee \sim D_1) \cdot v. \sim G_3 \vee F_2 \vee \sim H_4 \vee D_5$   
 S no es válida

# EJEMPLOS SOBRE LA FORMA II.

- (1) S  $(x) (Fx \longrightarrow Gx) \cdot (x) (FxvHx) \cdot (x) (Hx \longrightarrow Fx)$   
 $\cdot \longrightarrow \cdot (Ex) (Fx.Gx)$   
 $\sim((x) (Fx \longrightarrow Gx) \cdot (x) (FxvHx) \cdot (x) (Hx \longrightarrow Fx))$   
 $\vee (Ex) (Fx \cdot Gx)$   
 $\sim(x) (Fx \longrightarrow Gx) \vee \sim(x) (FxvHx) \vee \sim(x) (Hx \longrightarrow Fx)$   
 $(Ex) \cdot (Fx \longrightarrow Gx) \vee (Ex) \sim (FxvHx) \vee (Ex) \sim (Hx \longrightarrow Fx)$   
 $\cdot v. (Ex) (Fx.Gx)$   
 S'  $(Ex) (Fx \cdot \sim Gx) \vee (Ex) (\sim Fx \cdot Hx) \vee (Ex) (Hx \cdot \sim Fx)$   
 $\cdot v. (Ex) (Fx.Gx)$   
 S'p  $(F \cdot \sim G) \vee (\sim F \cdot H) \vee (H \cdot \sim F) \cdot v. (F.G)$   
 Conn. y Asoc. :  
 $((F \cdot \sim G) \vee (F.G)) \vee ((\sim F \cdot H) \vee (\sim F \cdot H))$   
 Haciendo la oper. inversa de la distrib.: Distr:  
 $(F \cdot \sim G \vee G) \vee (\sim F \cdot H \vee H)$



$Fv \sim F . Fv \sim HvH . \sim GvG v \sim F . \sim GvGv \sim HvH$

S es válida

(2) S  $(x) (Fx.Gx) . (x) (Hxv \sim Fx) . \longrightarrow . (Ex)$   
 $(GxvHxv \sim Fx)$   
 $\sim ((x) (Fx.Gx).(x) (Hxv \sim Fx)) v (Ex) (GxvHxv \sim Fx)$   
 $\sim (x) (Fx . Gx) v \sim (x) (Hxv \sim Fx) . v . (Ex) (GxvHxv \sim Fx)$   
 $(Ex) \sim (Fx . Gx) v (Ex) \sim (Hxv \sim Fx) . v . (Ex)$   
 $(GxvHxv \sim Fx)$   
 S'  $(Ex) (\sim Fxv \sim Gx) v (Ex) (\sim Hx.Fx) . v . (Ex)$   
 $(GxvHxv \sim Fx)$

S'  $(\sim Fv \sim G) v (\sim H . F) . v . (CvHv \sim F)$   
 $Fv \sim GvFvGvHv \sim F$

S es válida

(3) S  $(x) (FxvGxvHx) . (x) (\sim Hxv \sim Gx) . \longrightarrow . (Ex) (Fx . \sim Hx .$   
 $\sim Gx)$   
 $\sim ((x) (FxvGxvHx) . (x) (\sim Hxv \sim Gx)) v (Ex) (Fx . \sim Hx . \sim$   
 $Gx)$   
 $\sim (x) (FxvGxvHx) v \sim (x) (\sim Hxv \sim Gx) . v . (Ex) (Fx . \sim Hx .$   
 $\sim Gx)$   
 $(Ex) \sim (FxvGxvHx) v (Ex) \sim (\sim Hxv \sim Gx) . v . (Ex)$   
 $(Fx . \sim Hx . \sim Gx)$   
 S'  $(Ex) (\sim Fx . \sim Gx . \sim Hx) v (Ex) (Hx.Gx) . v . (Ex)$   
 $(Fx . \sim Hx . \sim Gx)$

S'  $(\sim F . \sim G . \sim H) v (H.G) . v . (F . \sim H . \sim G)$   
 $(\sim H . \sim G . \sim F) v (\sim H . \sim G . F) v (H.G)$   
 $(\sim H . \sim G) . (\sim F v F) . v . (H.G)$

T

$(\sim H . \sim G) v (H.G)$

$HvH . \sim HvG . \sim GvH . \sim GvG$

S no es válida



(4) S  $(x)(F_{xv}H_{xv} \sim G_x) \cdot \longrightarrow \cdot (Ex) F_{xv} (Ex) H_{xv} (Ex) \sim G_x$   
 $\sim (x)(F_{xv}H_{xv} \sim G_x) \cdot v \cdot (Ex) F_{xv} (Ex) H_{xv} (Ex) \sim G_x$   
 $(Ex) \sim (F_{xv}H_{xv} \sim G_x) \cdot v \cdot (Ex) F_{xv} (Ex) H_{xv} (Ex) \sim G_x$   
 S'  $(Ex) (\sim F_x \cdot H_x \cdot G_x) \cdot v \cdot (Ex) F_{xv} (Ex) H_{xv} (Ex) \sim G_x$   
 $(\sim F \cdot \sim H \cdot \sim G) v F v H v \sim G$   
 $\sim G v F v H v \sim G$   
 S es válida

(5) S  $(x)(G_x.H_x) \cdot (x) \sim F_x \cdot (x) \sim T_x \cdot \longrightarrow \cdot (Ex)(G_x.H_x \cdot$   
 $\sim F_x \cdot \sim T_x)$   
 $\sim ((x)(G_x.H_x) \cdot (x) \sim F_x \cdot (x) \sim T_x) \cdot v \cdot (Ex)(G_x.H_x \cdot \sim F_x \cdot \sim T_x)$   
 $\sim (x)(G_x.H_x) v \sim (x) \sim F_{xv} \sim (x) \sim T_x \cdot \checkmark \cdot (Ex)(G_x.H_x \cdot \sim$   
 $F_x \cdot \sim T_x)$   
 $(Ex) \sim (G_x.H_x) v (Ex) F_{xv} (Ex) T_x \cdot v \cdot (Ex)(G_x.H_x \cdot \sim$   
 $F_x \cdot \sim T_x)$   
 S'  $(Ex)(\sim G_{xv} \sim H_x) v (Ex) F_{xv} (Ex) T_x \cdot v \cdot (Ex)(G_x \cdot$   
 $H_x \cdot \sim F_x \cdot \sim T_x)$   
 S'  $(\sim G_v \sim H) v F_{vT} \cdot v \cdot (G \cdot H \cdot \sim F \cdot \sim T)$   
 $\sim G_v \sim H v F_{vT} v T$   
 S es válida

(6) S  $(x)(H_x \longrightarrow Ax) \cdot (x)(Ax \longrightarrow Cx) \cdot \longrightarrow \cdot (Ex)$   
 $(H_x \longrightarrow Cx)$   
 $\sim ((x)(H_x \longrightarrow Ax) \cdot (x)(Ax \longrightarrow Cx)) \cdot v \cdot (Ex)(H_x \longrightarrow Cx)$   
 $\sim (x)(H_x \longrightarrow Ax) \sim (x)(Ax \longrightarrow Cx) \cdot v \cdot (Ex)(H_x \longrightarrow Cx)$   
 $(Ex) \sim (H_x \longrightarrow Ax) v (Ex) \sim (Ax \longrightarrow Cx) \cdot v \cdot (Ex)$   
 $(H_x \longrightarrow Cx)$   
 S'  $(Ex)(H_x \cdot \sim Ax) v (Ex)(S_x \cdot \sim Cx) \cdot v \cdot (Ex)(\sim H_{xv} C_x)$   
 S'  $(H \cdot \sim A) v (A \cdot \sim C) \cdot v \cdot (\sim H \cdot C)$   
 $H v A v \sim H v C$   
 S es válida

(7) S  $(x)(M_x.R_x \longrightarrow \cdot \sim T_x) \cdot (x)(M_x.R_x \longrightarrow \cdot P_x)$   
 $\cdot \longrightarrow \cdot (Ex)(M_x \cdot P_x \cdot \sim T_x)$   
 $\sim ((x)(M_x.R_x \longrightarrow \cdot \sim T_x) \cdot (x)(M_x.R_x \longrightarrow \cdot P_x))$   
 $v (Ex)(M_x \cdot P_x \cdot \sim T_x)$   
 $\sim (x)(M_x.R_x \longrightarrow \cdot \sim T_x) v \sim (x)(M_x.R_x \longrightarrow \cdot P_x)$   
 $\cdot v \cdot (Ex)(M_x \cdot P_x \cdot \sim T_x)$



$$(Ex) \sim (Mx.Rx \rightarrow \sim Tx) \vee (Ex) \sim (Mx.Rx \rightarrow Px) \\ \vee (Ex) (Mx.Px \sim Tx)$$

$$\begin{aligned} S' \quad & (Ex) (Mx.Rx.Tx) \vee (Mx.Rx \sim Px) \vee (Ex) (Mx.Px \sim Tx) \\ & (M.R.T) \vee (M.R. \sim P) \vee (M.P. \sim T) \\ & ((M.R.T) \vee (M.R. \sim P)) \vee (M.P. \sim T) \\ & (M.R) \cdot (Tv \sim P) \vee (M.P. \sim T) \\ & ((M.R) \vee (M.P. \sim T)) \cdot (Tv \sim P) \vee (M.P. \sim T) \\ & ((M.R) \vee (M.P. \sim T)) \cdot (Tv \sim PvM) \\ & (M.R) \cdot (Tv \sim PvM) \vee (M.P. \sim T) \cdot (Tv \sim PvM) \\ & (M.R) \vee (M.P. \sim T) \end{aligned}$$

$$(MvM) \cdot (Mv \sim T) \cdot (MvP) \cdot (RvM) \cdot (RvP) \cdot (Rv \sim T)$$

S no es válida.

$$\begin{aligned} S' \quad & (x)(Rx \rightarrow \sim Mx) \cdot (x)(Px \rightarrow RxvMx) \cdot (x) \sim Rx \rightarrow \cdot \\ & (Ex)(\sim Pxv Mx) \\ & \sim ((x)(Rx \rightarrow \sim Mx) \cdot (x)(Px \rightarrow RxvMx) \cdot (x) \sim \\ & \sim Rx) \cdot \rightarrow \cdot (Ex)(\sim Pxv \sim Mx) \\ & \sim (x)(Rx \rightarrow Mx) \vee \sim (x)(Px \rightarrow RxvMx) \vee \sim (x) \\ & \sim Rx \cdot \vee (Ex)(\sim Pxv \sim Mx) \\ & (Ex) \sim (Rx \rightarrow \sim Mx) \vee (Ex) \sim (Px \rightarrow RxvMx) \vee (Ex) \\ & (Rx \cdot \vee (Ex)(\sim Pxv \sim Mx)) \end{aligned}$$

$$S' \quad (Ex)(Rx.Mx) \vee (Ex)(Px. \sim Mx) \vee (Ex)Rx \cdot \vee (Ex)(\sim Pxv \sim Mx)$$

$$\begin{aligned} S'_P \quad & (\neg M) \vee (\neg P \sim \neg M) \vee R \cdot \vee (\sim Pv \sim M) \\ & \sim MvRv \sim Pv \sim M \end{aligned}$$

S no es válida

$$\begin{aligned} (9) \quad S \quad & (x)(Fx \rightarrow Gx \sim Hx) \cdot (x)(Gx \rightarrow Dx) \rightarrow \cdot \\ & (Ex)(Fx.Dx) \\ & \sim ((x)(Fx \rightarrow Gx \sim Hx) \cdot (x)(Gx \rightarrow Dx)) \vee \\ & (Ex)(Fx.Dx) \\ & \sim (x)(Fx \rightarrow Gx \sim Hx) \vee \sim (x)(Gx \rightarrow Dx) \cdot \vee \\ & (Ex)(Fx.Dx) \\ & (Ex) \sim (Fx \rightarrow Gx \sim Hx) \vee (Ex) \sim (Gx \rightarrow Dx) \\ & \cdot \vee (Ex)(Fx.Dx) \\ & (Ex) \sim (\sim Fx \cdot \vee Gx \sim Hx) \vee (Ex) \sim (\sim GxvDx) \\ & \cdot \vee (Ex)(FxvDx) \\ & (Ex)(Fx \sim (Gx \sim Hx)) \vee (Ex)(Gx \sim Dx) \cdot \vee (Ex)(FxvDx) \\ S' \quad & (Ex)(Fx \sim GxvHx) \vee (Ex)(Gx \sim Dx) \cdot \vee (Ex)(FxvDx) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 S'_P & (F \cdot \sim GvH)(G \cdot \sim D) \cdot v \cdot (FvD) \\
 & ((F \cdot \sim GvH) \vee (G \cdot \sim D)) \vee (F \cdot D) \\
 & ((FvG) \cdot (Fv \sim D) \cdot (\sim FvHvG) \cdot (\sim GvHvD)) \\
 & (FvGvF) \cdot (Fv \sim D \cdot vF) \cdot (Fv \sim DvD) \cdot \\
 & (\sim GvHvGvF) \cdot (\sim GvHvGvD) \cdot (\sim GvHv \sim DvF) \cdot (\sim GvHv \sim DvD) \\
 & S \text{ no es válida}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10) \quad S & (x)(WxDx) \cdot (x)(\sim Hx \cdot \sim Wx) \cdot \longrightarrow \cdot (Ex)(\sim Wxv \sim (Dx \cdot Hx)) \\
 & \sim((x)(Wx \cdot Dx) \cdot (x)(\sim Hx \cdot \sim Wx)) \cdot v \cdot (Ex)(\sim Wxv \sim (Dx \cdot Hx)) \\
 & \sim(x)(Wx \cdot Dx) \vee \sim(x)(Hx \cdot \sim Wx) \cdot v \cdot (Ex)(\sim Wxv \sim (Dx \cdot Hx)) \\
 & (Ex) \sim (Wx \cdot Dx) \vee (Ex) \sim (\sim Hx \cdot \sim Wx) \cdot v \cdot (Ex)(\sim Wxv \sim Dx \vee \sim Hx) \\
 S'_P & (Ex)(\sim Wxv \sim Dx) \vee (Ex)(HxvWx) \cdot v \cdot (Ex)(\sim Wxv \sim Dxv \sim Hx) \\
 S'_P & (\sim Wv \sim D)v(HvW) \cdot v \cdot (\sim Wv \sim Dv \sim H) \\
 & S \text{ es válida}
 \end{aligned}$$

### SOBRE LA FORMA III

$$\begin{aligned}
 (1) & (x)(Mx \longrightarrow \sim Px) \cdot (x)(Hx \longrightarrow Mx) \cdot \longrightarrow \cdot (x)(Hx \longrightarrow \sim Px) \\
 & \sim((x)(Mx \longrightarrow \sim Px) \cdot (x)(Hx \longrightarrow Mx)) \vee (x)(Hx \longrightarrow \sim Px) \\
 & \sim(x)(Mx \longrightarrow \sim Px) \vee \sim(x)(Hx \longrightarrow Mx) \cdot v \cdot (x)(Hx \longrightarrow \sim Px) \\
 & (Ex) \sim (Mx \longrightarrow \sim Px) \vee (Ex) \sim (Hx \longrightarrow Mx) \cdot v \cdot (x)(Hx \longrightarrow \sim Px) \\
 S'_P & (Ex)(Mx \cdot Px) \vee (Ex)(Hx \cdot \sim Mx) \cdot v \cdot (x)(\sim Hxv \sim Px) \\
 S'_P & (M \cdot P) \vee (H \cdot \sim M) \vee (\sim Hv \sim P) \\
 & S \text{ es válida}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad S & (x)(Dx \longrightarrow Cx) \cdot (Ex)(Ax \cdot Dx) \cdot \longrightarrow \cdot (Ex)(Ax \cdot Cx) \\
 & \sim((x)(Dx \longrightarrow Cx) \cdot (Ex)(Ax \cdot Dx)) \vee (Ex)(Ax \cdot Cx) \\
 & \sim(x)(Dx \longrightarrow Cx) \vee \sim(Ex)(Ax \cdot Dx) \cdot v \cdot (Ex)(Ax \cdot Cx) \\
 & (Ex) \sim (Dx \longrightarrow Cx) \vee (x) \sim (Ax \cdot Dx) \cdot v \cdot (Ex)(Ax \cdot Cx) \\
 S'_P & (Ex)(Dx \cdot \sim Cx) \vee (x)(\sim Axv \sim Dx) \cdot v \cdot (Ex)(Ax \cdot Cx) \\
 S'_P & (D \cdot \sim C) \vee (\sim Av \sim D) \vee (A \cdot C)
 \end{aligned}$$



Cv Av DvC

S es válida

$$\begin{aligned}
 (3) \quad S & (Ex)(Cx.Ax) \cdot (Ex)(Dx.Ax) \longrightarrow \cdot (Ex)(Cx.Dx) \\
 & \sim((Ex)(Cx.Ax) \cdot (Ex)(Dx.Ax)) \vee (Ex)(Cx.Dx) \\
 & \sim(Ex)(Cx.Ax) \vee \sim(Ex)(Dx.Ax) \cdot v. (Ex)(Cx.Dx) \\
 & (x) \sim(Cx.Ax) \vee (x) \sim(Dx.Ax) \cdot v. (Ex)(Cx.Dx) \\
 S' & (x) (\sim Cx \vee \sim Ax) \vee (x) (\sim Dx \vee \sim Ax) \cdot v. (Ex)(Cx.Dx) \\
 m = 2:
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S'_p & ((\sim C_1 \vee \sim A_1) \vee (\sim D_2 \vee \sim A_2) \vee (\sim C_1 \cdot D_1) \vee (C_2 \vee D_2) \\
 & \sim C_1 \vee \sim A_1 \vee \sim D_2 \vee \sim A_2 \vee D_1 \vee C_2
 \end{aligned}$$

S no es válida.

$$\begin{aligned}
 (4) \quad S & (x)((Fx \vee Sx) \longrightarrow (Ix \cdot Wx)) \longrightarrow (x)(Fx \longrightarrow Ix) \\
 & \sim(x)((Fx \vee Sx) \longrightarrow (Ix \cdot Wx)) \vee (x)(Fx \longrightarrow Ix) \\
 & (Ex) \sim((Fx \vee Sx) \longrightarrow (Ix \cdot Wx)) \vee (x)(Fx \longrightarrow Ix) \\
 & (Ex)((Fx \vee Sx) \cdot \sim(Ix \cdot Wx)) \vee (x)(Fx \longrightarrow Ix) \\
 S' & (Ex)((Fx \vee Sx) \cdot (\sim Ix \vee \sim Wx)) \vee (x)(\sim Fx \vee Ix) \\
 S'_p & (FvS) \cdot (\sim Iv \sim W) \cdot v. (\sim FvI) \\
 & FvS \vee \sim FvI \cdot \sim Iv \sim W \vee \sim FvI \\
 & S \text{ es válida}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad S & (x)((Ax \vee Bx) \longrightarrow (Cx \cdot Dx)) \cdot (x)((Cx \vee Ex) \longrightarrow ((Fx \vee Gx) \\
 & \longrightarrow Hx)) \longrightarrow \cdot (x)(Ax \longrightarrow (Fx \longrightarrow Hx)) \\
 & \sim((x)((Ax \vee Bx) \longrightarrow (Cx \cdot Dx)) \cdot (x)((Cx \vee Ex) \longrightarrow ((Fx \vee Gx) \\
 & \longrightarrow Hx))) \vee (x)(Ax \longrightarrow (Fx \longrightarrow Hx)) \\
 & \sim(x)((Ax \vee Bx) \longrightarrow (Cx \cdot Dx)) \vee \sim(x)((Cx \vee Ex) \longrightarrow ((Fx \vee Gx) \\
 & \longrightarrow Hx)) \cdot v. (x)(Ax \longrightarrow (Fx \longrightarrow Hx)) \\
 & (Ex) \sim((Ax \vee Bx) \longrightarrow (Cx \cdot Dx)) \vee (Ex) \sim((Cx \vee Ex) \longrightarrow ((Fx \vee Gx) \\
 & \longrightarrow Hx)) \cdot v. (x)(Ax \longrightarrow (Fx \longrightarrow Hx)) \\
 & (Ex)((Ax \vee Bx) \cdot \sim(Cx \cdot Dx)) \vee (Ex)((Cx \vee Ex) \cdot \sim((Fx \vee Gx) \\
 & \longrightarrow Hx)) \cdot v. (x)(Ax \longrightarrow (Fx \longrightarrow Hx)) \\
 S' & (Ex)((Ax \vee Bx) \cdot (\sim Cx \vee \sim Dx)) \vee (Ex)((Cx \vee Ex) \cdot ((Fx \vee Gx) \\
 & \sim Hx)) \cdot v. (x)(\sim Ax \vee \sim Fx \vee Hx) \\
 S'_p & ((AvB) \cdot (\sim Cv \sim D)) \vee ((CvE) \cdot ((FvG) \cdot \sim H) \\
 & \cdot v. (\sim Av \sim FvH) \\
 & ((AvB) \cdot (\sim Cv \sim D)) \vee ((CvE) \cdot (FvG) \cdot \sim H) \vee \\
 & (\sim Av \sim FvH) \\
 & ((AvB) \cdot (\sim Cv \sim D)) \vee ((CvE \vee \sim Av \sim FvH) \cdot (FvG \vee \sim Av \sim FvH))
 \end{aligned}$$



$$(AvBvCvEv \wedge Av \wedge FvH) \cdot (AvBvFvGv \wedge Av \wedge FvH) \cdot (Cv \wedge DvCvEv \wedge Av \wedge FvH) \cdot (\sim Cv \wedge DvFvGv \wedge Av \wedge FvH)$$

S es válida

$$\begin{aligned} (6) \quad S \quad & (Ex) Hx \cdot (Ex) \sim Hx \cdot \longrightarrow \cdot (Ex)(Hx \cdot \sim Hx) \\ & \sim ((Ex) Hx \cdot (Ex) \sim Hx) \vee (Ex)(Hx \cdot \sim Hx) \\ & \sim (Ex) Hx \cdot \vee \cdot \sim (Ex)(Hx \cdot \sim Hx) \\ S' \quad & (x) \sim Hx \vee \sim (x) \sim Hx \cdot \vee \cdot (Ex)(Hx \cdot \sim Hx) \\ S'_P \quad & \sim H_1 \vee H_2 \cdot \vee \cdot (H_1 \cdot \sim H_1) \vee (H_2 \cdot \sim H_2) \end{aligned}$$

S no es válida

$$\begin{aligned} (7) \quad S \quad & (x)(Dx \longrightarrow \sim Wx) \cdot (x)(Ox \longrightarrow Wx) \cdot (x)(Px \longrightarrow Dx) \cdot \longrightarrow \cdot \\ & (x)(Px \longrightarrow \sim Ox) \\ & \sim ((x)(Dx \longrightarrow \sim Wx) \cdot (x)(Ox \longrightarrow Wx) \cdot (x)(Px \longrightarrow Dx)) \\ & \vee (x)(Px \longrightarrow \sim Ox) \\ & \sim (x)(Dx \longrightarrow \sim Wx) \vee \sim (x)(Ox \longrightarrow Wx) \vee \sim (x)(Px \longrightarrow Dx) \\ & \cdot \vee \cdot (x)(Px \longrightarrow \sim Ox) \\ & (Ex) \sim (Dx \longrightarrow \sim Wx) \vee (Ex) \sim (Ox \longrightarrow Wx) \vee (Ex) \sim (Px \longrightarrow Dx) \\ & \cdot \vee \cdot (x)(Px \longrightarrow \sim Ox) \\ S' \quad & (Ex)(Dx \cdot Wx) \vee (Ex)(Ox \cdot \sim Wx) \vee (Ex)(Px \cdot \sim Dx) \cdot \vee \cdot \\ & (x) Px \vee \sim Ox \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\emptyset \vee W) \vee (O \cdot \sim W) \vee (\emptyset \cdot \sim D) \cdot \vee \cdot (\sim P \vee \sim O) \\ & W \vee O \vee \sim D \vee \sim P \vee \sim O \end{aligned}$$

S es válida.

$$\begin{aligned} (8) \quad S \quad & (x)(Ax \longrightarrow Mx) \cdot (x)(Hx \longrightarrow Ax) \cdot \longrightarrow \cdot (x)(Hx \longrightarrow Mx) \\ & ((x)(Ax \longrightarrow Mx) \cdot (x)(Hx \longrightarrow Ax)) \vee (x)(Hx \longrightarrow Mx) \\ & (x)(Ax \longrightarrow Mx) \vee \sim (x)(Hx \longrightarrow Ax) \cdot \vee \cdot (x)(Hx \longrightarrow Mx) \\ & (Ex)(Ax \longrightarrow Mx) \vee (Ex) \sim (Hx \longrightarrow Ax) \cdot \vee \cdot (x)(Hx \longrightarrow Mx) \\ S' \quad & (Ex)(Ax \cdot \sim Mx) \vee (Ex)(Hx \cdot \sim Ax) \cdot \vee \cdot (x)(\sim Hx \vee Mx) \\ S'_P \quad & (A \cdot \sim M) \vee (H \cdot \sim A) \cdot \vee \cdot (\sim H \vee M) \end{aligned}$$

$$A^V \sim A^V \cdot H^V M$$

S es válida.

$$\begin{aligned}
 (9) \quad S \quad & (Ex)(Fx.Sx) \rightarrow (x)(Mx \rightarrow Wx) \cdot (Ex)(Mx \cdot \sim Wx) \cdot \rightarrow \cdot \\
 & (x)(Fx \rightarrow \sim Sx) \\
 & \sim ((Ex)(Fx.Sx) \rightarrow (x)(Mx \rightarrow Wx) \cdot (Ex)(Mx \cdot \sim Wx)) \vee \\
 & (x)(Fx \rightarrow \sim Sx) \\
 & \sim ((Ex)(Fx.Sx) \rightarrow (x)(Mx \rightarrow Wx) \cdot \vee \cdot \sim (Ex)(Mx \cdot \sim Wx)) \\
 & :v: (x)(Fx \rightarrow \sim Sx) \\
 & (Ex)(Fx.Sx) \cdot \sim (x)(Mx \rightarrow Wx) \cdot \vee \cdot (x) \sim (Mx \cdot \sim Wx) \\
 & :v: (x)(Fx \rightarrow \sim Sx) \\
 & (Ex)(Fx.Sx) \cdot (Ex) \sim (Mx \rightarrow Wx) \cdot \vee \cdot (x)(\sim Mx \vee Wx) \\
 & :v: (x)(Fx \rightarrow \sim Sx) \\
 S' \quad & (Ex)(Fx.Sx) \cdot (Ex)(Mx \cdot \sim Wx) \cdot \vee \cdot (x)(\sim Mx \vee Wx) :v: (x) \\
 & (\sim Fx \vee \sim Sx)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (Ex)(Fx.Sx) \vee (x)((\sim Mx \vee Wx) \vee (x)(\sim Fx \vee \sim Sx) \cdot (Ex)(Mx \cdot \sim Wx) \vee \\
 & (x)(\sim Mx \vee Wx) \vee (x)(\sim Fx \vee \sim Sx)) \\
 & (F_1 \cdot S_1) \vee (F_2 \cdot S_2) \vee (\sim F_1 \vee \sim S_1) \vee (\sim M_2 \vee W_2) \cdot (M_1 \cdot \sim W_1) \vee \\
 & (\sim M_1 \vee W_1) \vee (\sim F_2 \vee \sim S_2) \\
 & S_1 \vee \sim S_1 \quad \sim W_1 \vee W_1
 \end{aligned}$$

S es válida

$$\begin{aligned}
 (10) \quad S \quad & (x)(Gx \rightarrow Hx) \wedge (Ex)(Fx.Gx) \cdot \rightarrow \cdot (Ex)(Fx \cdot \sim Hx) \\
 & \sim ((x)(Gx \rightarrow \sim Hx) \cdot (Ex)(Fx.Gx)) \vee (Ex)(Fx \cdot \sim Hx) \\
 & \sim (x)(Gx \rightarrow \sim Hx) \vee (Ex)(Fx.Gx) \cdot \vee \cdot (Ex)(Fx \cdot \sim Hx) \\
 & (Ex) \sim (Gx \rightarrow \sim Hx) \vee (x) \sim (Fx.Gx) \cdot \vee \cdot (Ex)(Fx \cdot \sim Hx) \\
 S' \quad & (Ex)(Gx.Hx) \vee (x)(\sim Fx \vee \sim Gx) \cdot \vee \cdot (Ex)(Fx \cdot \sim Hx) \\
 S'_p \quad & (G.H) \vee (\sim F \vee \sim G) \vee (F \cdot \sim H) \\
 & H^V \sim F^V \sim G^V \sim H
 \end{aligned}$$

S es válida



## 2. REGLAS DECISORIAS PARA LAS FORMULAS NO BASICAS

Antes de prescribir las reglas decisorias para este tipo de fórmulas, previamente las dividiremos en dos clases: fórmulas complejas y fórmulas en forma normal prenexa y, trataremos de definir las a cada una con la mayor claridad y rigor posible. Cabe advertir aquí, que esta distinción de dos clases de fórmulas no básicas es puramente metodológica.

### I. FORMULAS COMPLEJAS

Una fórmula compleja monádica es aquella fórmula de la forma  $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n A$ ,  $1 \leq i \leq n$ , donde cada  $Q_i x_i$  es o bien un " $(x)$ " o bien un " $(Ex)$ ",  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j$ , y  $A$  además de contener cuando menos una ocurrencia de  $x_i$ , contiene también cuando menos un cuantificador. Hablando de un modo más simple y a la vez general, fórmula compleja monádica es aquella fórmula cuantificada que además de comprender únicamente letras predicativas monádicas en su operando, comprenden además cuando menos a una cuantificación también de letras predicativas monádicas.

Ahora bien, toda fórmula monádica compleja  $S_1$  es reducible a otra fórmula equivalente básica  $S'$ . Por tanto, una fórmula monádica compleja  $S_1$  será lógicamente válida únicamente si hay otra fórmula equivalente básica  $S'$ . El método para reducir a cualquier fórmula monádica compleja  $S_1$  a otra equivalente básica  $S'$  es como sigue:

Sea  $n$  ( $n \geq 1$ ) el número de cuantificadores que no sean únicamente los de su propio operando. Para reducir a una fórmula  $S_1$  que contiene a estos  $n$  cuantificadores a una fórmula equivalente básica  $S'$  es suficiente con proceder sucesivamente de acuerdo a las siguientes reglas:

- 1.- Hallar una fórmula equivalente  $S$  eliminando a todas las conectivas " $\rightarrow$ ", " $\leftrightarrow$ ", etc., mediante definiciones, a fin de que aparezcan únicamente " $\vee$ ", " $\wedge$ " y/o " $\sim$ ", internada esta última.
- 2.- Empleando las siguientes equivalencias cuantas veces sea necesaria

- (1)  $Av(x)Fx \leftrightarrow (x)(AvFx)$
- (2)  $A.(x)Fx \leftrightarrow (x)(A.Fx)$
- (3)  $Av(Ex)Fx \leftrightarrow (Ex)(AvFx)$



$$(4) \quad A. (Ex) Fx. \langle \text{---} \rangle. (Ex) (A.Fx)$$

internar a todos los  $n$  cuantificadores empezando por el orden mínimo, es decir, por el cuantificador cuyo operando comprenda el mínimo número de cuantificadores, hasta conseguir internar progresivamente a todos los demás cuantificadores. De este modo, una vez internada el cuantificador de orden  $n$ ,  $S_1$  (y por tanto,  $S$ ) se habrá reducido a una fórmula básica equivalente, pero aún falta modificar un detalle en esta fórmula así conseguida, la cual se hará en el siguiente paso.

Es preciso indicar que, la única restricción al uso de las equivalencias (1) - (4) es que  $x$  no debe estar libre en  $A$ , aunque en presente caso esta indicación es casi por demás, ya que en esta reducción se parte de una fórmula cerrada.

3.- Unificar a todas las variables individuales, de tal modo que,  $S'$  no exhiba mas que un sólo tipo de variable individual.

4.- Una vez conseguida  $S'$  de este modo, para saber si  $S_1$  es l-válida es suficiente con aplicar a  $S'$  cualesquiera de las reglas R1-R3, según sea el caso.

#### ALGUNOS EJEMPLOS SOBRE LA APLICACION DE ESTAS REGLAS

(I)	$S_1$	$(Ey)(x) (Fx \rightarrow Gy) \rightarrow (x)(Ey)(Fx \rightarrow Gy)$ $\sim (Ey)(x)(Fx \rightarrow Gy) \vee (x)(Ey)(Fx \rightarrow Gy)$ $(y)(Ex) \sim (Fx \rightarrow Gy) \vee (x)(Ey)(Fx \rightarrow Gy)$ $(y)(Ex)(Fx \sim Gy) \vee (x)(Ey)(\sim Fx \vee Gy)$ $(y)((Ex)(Fx, \sim Gy) \vee (\sim Fx \vee (Ey)Gy)$ $(Ex)Fx. (y) \sim Gy \vee. (x) \sim Fx \vee (Ey) Gx$	
	$S'$	$(Ex)Fx. (Ex) \sim Gx. \vee. (x) \sim Fx \vee (Ex)Gx$ $(Ex)Fx \vee (x) \sim Fx \vee (Ex)Gx. (x) \sim Gx \vee (x)$ $\sim Fx \vee (Ex) Gx$	Unificando las varia- bles: Ha- llando su
	$S'_p$	$Fx \vee FxG \sim G_1 \vee \sim F_2 \vee G_1 \vee G_2$	FNC:
		$S_1$ es válida	

(2)	$S$	$(Ex)(Ey)((Fx \vee Gy).Hy) \rightarrow (x)(y)(Fy \vee Gx)$ $\sim (Ex)(Ey)((Fx \vee Gy).Hy) \vee (x)(y)(Fy \vee Gx)$ $(x)(y) \sim ((Fx \vee Gy).Hy) \vee (x)(y)(Fy \vee Gx)$ $(x)(y)(\sim (Fx \vee Gy) \vee \sim Hy) \vee (x)(y)(Fy \vee Gx)$ $(x)(y)((\sim Fx \sim Gy) \vee \sim Hy) \vee (x)(y)(Fy \vee Gx)$ $(x)(y)(\sim Fx \sim Hy \vee Gy \sim Hy) \vee (x)(y)(Fy \vee Gx)$
-----	-----	--



$$\begin{aligned}
 & (x)((y)(\sim Fxy \sim Hy) \cdot (y)(\sim Gyv \sim Hy)) \cdot v \cdot (y)Fyv(x)Gx \\
 & (x) \sim Fxv(y) \sim Hy \cdot (y)(\sim Gyv \sim Hy) \cdot v \cdot (y)Fyv(x)Gx \\
 S' & (x) \sim Fxv(x) \sim Hx \cdot (x)(\sim Gxv \sim Hx) \cdot v \cdot (x)Fyv(x)Gx \\
 S' & F_1 v \sim H_2 \cdot (\sim G_3 v \sim H_3) v F_4 v G_5 \\
 S' & p
 \end{aligned}$$

$S_1$  no es válida.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad S_1 & \sim(Ey)(Fy \rightarrow (x)Fx) \rightarrow (Ey)(Fy \rightarrow (x)Fx) \\
 & \sim(\sim(Ey)(Fy \rightarrow (x)Fx)) v (Ey)(Fy \rightarrow (x)Fx) \\
 & (Ex)(\sim Fyv(x)Fxv(Ey)(\sim Fyv(x)Fx)) \\
 & (Ey) \sim Fyv(x)Fx \cdot v \cdot (Ey) \sim Fyv(x)Fx \\
 S' & (Ex) \sim Fxv(x)Fx \cdot v \cdot (Ex) \sim Fxv(x)Fx \quad \text{Simplifi-} \\
 S' & p & \text{cando} \\
 & (Ex) \sim Fxv(x)Fx \\
 & FvF \\
 & T
 \end{aligned}$$

$S_1$  es válida

$$\begin{aligned}
 (4) \quad S_1 & (x)((Bx \cdot Yx) \rightarrow ((y)((Yy \cdot By) \rightarrow Ry) \rightarrow Rx)) \\
 & (x)(\sim(Bx \cdot Yx) v (\sim(y)(Yy \cdot By) v Ry) v Rx) \\
 & (x)((\sim Bxv \sim Yx) v ((Ey) \sim(Yy \cdot By) v Ry) v Rx) \\
 & (x)((\sim Bxv \sim Yx) v ((Ey)((Yy \cdot By) v Ry) v Rx)) \\
 & (x)((\sim Bxv \sim YxvRx) v (Ey)(Yy \cdot By \cdot v \cdot Ry)) \\
 & (x)(\sim Bxv \sim YxvRx) v (Ey)(Yy \cdot By \cdot v \cdot Ry) \\
 S' & (x)(\sim Bxv \sim YxvRx) v (Ex)(Yx \cdot Bx \cdot v \cdot Rx) \\
 S' & p & (Bv \sim YvR) v (Y \cdot B \cdot v \cdot R) \\
 & S_1 \text{ es válida.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad S_1 & (x)((Ox \cdot Px) \rightarrow (CxvMx)) \rightarrow (Ey)((Cy \cdot Py) v (Ez) \\
 & (MzvPz))) \\
 & (x)(\sim(\sim(Ox \cdot Px) v (CxvMx)) v (Ey)((Cy \cdot Py) v (Ez) \\
 & (MzvPz))) \\
 & (x)((Ox \cdot Px) \cdot (\sim Cx \cdot \sim Mx)) v (Ey)((Cy \cdot Py) v (Ez)(MzvPz)) \\
 S' & (x)((Ox \cdot Px) \cdot (\sim Cx \cdot \sim Mx)) v (Ex)(Cx \cdot Px) v (Ex)( \\
 & (MxvPx)) \\
 S' & p & ((O \cdot P) \cdot (\sim C \cdot \sim M)) v (C \cdot P) v (MvP)
 \end{aligned}$$

$S_1$  no es válido



$$\begin{aligned}
 (6) \quad S_1 \quad & (x)((Sx.Wx) \rightarrow ((y)(Wy \rightarrow Fy) \rightarrow Fx)) \\
 & (x)(\sim (Sx.Wx) \vee (\sim (y)(\sim Wy \vee Fy) \vee Fx)) \\
 & (x)((\sim Sx \vee \sim Wx) \vee ((Ey) \sim (\sim Wy \vee Fy) \vee Fx)) \\
 & (x)((\sim Sx \vee \sim Wx) \vee ((Ey) (Wy \cdot \sim Fy) \vee Fx)) \\
 & (x)((\sim Sx \vee \sim Wx \vee Fx) \vee (Ey)(Wy \cdot \sim Fy)) \\
 & (x)(\sim Sx \vee \sim Wx \vee Fx) \vee (Ey)(Wy \cdot \sim Fy) \\
 & (x)(\sim Sx \vee \sim Wx \vee Fx) \vee (Ex)(Wx \cdot \sim Fx) \\
 & (\sim Sv \sim WvF) \vee (\sim F) \\
 & \sim Sv \sim WvF \sim F
 \end{aligned}$$

$S_1$  es válida

$$\begin{aligned}
 (7) \quad S_1 \quad & (Ex)(Ey)((Fxy.Gy).Hy) \rightarrow (x)(y)(FyvGx) \\
 & \sim (Ex)(Fxy.Gy).Hy \vee (x)(y)(FyvGx) \\
 & (x)(y) \sim (Fxy.Gy).Hy \vee (x)(y)(FyvGx) \\
 & (x)(y)(\sim (Fxy.Gy) \vee \sim Hy) \vee (x)(y)(FyvGx) \\
 & (x)(y)((\sim Fx \cdot \sim Gy) \vee \sim Hy) \vee (x)(y)(FyvGx) \\
 & (x)(y)((\sim Fx \vee \sim Hy) \cdot (\sim Gy \vee Hy)) \vee (x)(y)(FyvGx) \\
 & (x)((y)(\sim Fx \vee \sim Hy) \cdot (y)(\sim Gy \vee Hy)) \vee (x)((y)F \\
 & yvGx) \\
 & (x)((y)(Fx \vee Hy) \cdot (y)(Gy \vee Hy)) \cdot (x)((y) \\
 & (FyvGx))
 \end{aligned}$$

$$(x)(\sim Fx \vee (y) \sim Hy) \cdot (y)(\sim Gy \vee \sim Hy) \cdot v \cdot (y)Fyv(x)Gx$$

$$(x) \sim Fx \vee (y) \sim Hy \cdot (y)(\sim Gy \vee \sim Hy) \cdot v \cdot (y)Fyv(x)Gx$$

$$S' \quad (x) \sim Fx \vee (x) \sim Hx \cdot (x)(\sim Gx \vee \sim Hx) \cdot v \cdot (x)Fyv(x)Gx$$

$$S_p \quad \sim F_1 \vee \sim H_2 \cdot \sim G_3 \vee \sim H_3 \cdot v \cdot F_4 \vee G_5$$

$$\sim F_1 \vee \sim H_2 \vee F_4 \vee G_5 \cdot \sim G_3 \vee \sim H_3 \vee F_4 \vee G_5$$

$S_1$  no es válida

$$\begin{aligned}
 (8) \quad S \quad & (x)((Tx.Ax) \rightarrow ((Ey)(Gy.Cy) \rightarrow Sx)) \\
 & (x)(\sim (Tx.Ax) \vee (\sim (Ey)(Gy.Cy) \vee Sx)) \\
 & (x)((\sim Tx \vee \sim Ax) \vee ((y) \sim (Gy.Cy) \vee Sx)) \\
 & (x)((\sim Tx \vee \sim Ax) \vee ((y)(\sim Gy \vee \sim Cy) \vee Sx)) \\
 & (x)((\sim Tx \vee \sim Ax) \vee ((y)(\sim Gy \vee \sim Cy)) \vee Sx) \\
 & (x)((\sim Tx \vee \sim Ax \vee Sx) \vee (y)(\sim Gy \vee \sim Cy)) \\
 & (x)((\sim Tx \vee \sim Ax \vee Sx) \vee (x)(\sim Gx \vee \sim Cx))
 \end{aligned}$$

$$S' \quad (x)((\sim Tx \vee \sim Ax \vee Sx) \vee (x)(\sim Gx \vee \sim Cx))$$



$$S_p' \quad (\sim T_1 \vee \sim A_1 \vee S_1) \vee (\sim G_2 \vee \sim C_2)$$

$S_1$  no es válida

$$(9) \quad S_1 \quad \begin{aligned} & (x)(Mx \rightarrow ((y)(Py \rightarrow Vy) \rightarrow Mx)) \\ & (x)(\sim Mx \vee (\sim (y)(\sim Py \vee Vy) \vee Mx)) \\ & (x)(\sim Mx \vee ((Ey) \sim (\sim Py \vee Vy) \vee Mx)) \\ & (x)(\sim Mx \vee ((Ey)(Py \cdot \sim Vy) \vee Mx)) \\ & (x)((\sim Mx \vee Mx) \vee (Ey)(Py \cdot \sim Vy)) \\ & (x)(\sim Mx \vee Mx) \vee (Ey)(Py \cdot \sim Vy) \\ & (x)(\sim Mx \vee Mx) \vee (Ex)(Px \cdot \sim Vx) \\ & (\sim M \vee M) \vee (P \cdot \sim V) \end{aligned}$$

T

$S_1$  es válida

$$(10) \quad S_1 \quad \begin{aligned} & (x)((Px \cdot (z)(Px \rightarrow \sim Rx)) \rightarrow (y)(Py \rightarrow Hx)) \\ & (x)(\sim (Px \cdot (z)(\sim Px \vee \sim Rx)) \vee (y)(\sim Py \vee Hx)) \\ & (x)((\sim Px \vee \sim (z)(\sim Px \vee \sim Rx)) \vee (y)(\sim Py \vee Hx)) \\ & (x)((\sim Px \vee (Ez) \sim (\sim Px \vee \sim Rx)) \vee (y)(\sim Py \vee Hx)) \\ & (x)((\sim Px \vee (Ez)(Px \cdot Rx)) \vee (y)(\sim Py \vee Hx)) \\ & (x)((\sim Px \vee (Ez) Px \cdot Rx) \vee (y) \sim Py \vee Hx) \\ & (x)((\sim Px \vee Hx \vee (Ez) Px \cdot Rx) \vee (y) \sim Py) \\ & (x)((\sim Px \vee Hx \vee (Ez) Px \cdot \sim Px \vee Hx \vee Rx) \vee (y) \sim Py) \\ & (x)(\sim Px \vee Hx \vee (Ez) Px \cdot \sim Px \vee Hx \vee Rx) \vee (y) \sim Py \\ & \sim Py \end{aligned}$$

$$S' \quad \begin{aligned} & (x)(\sim Px \vee Hx) \vee (Ex) Px \cdot (x)(\sim Px \vee Hx \vee Rx) \cdot v. \\ & (x) \sim Px \\ & (x)(\sim Px \vee Hx) \vee (Ex) Px \vee (x) \sim Px \cdot (x)(\sim Px \vee Hx \vee \\ & Rx) \vee (x) \sim Px \end{aligned}$$

$$S_p' \quad (\sim P_1 \vee H_1) \vee P_1 \vee P_2 \vee \sim P_2 \cdot (P_1 \vee H_1 \vee R_1) \vee \sim P_2$$

$S_1$  no es válida.



## II. FORMAS NORMALES PRENEXAS

Se dice que una fórmula, digamos  $S_1$ , está en forma normal prenexa, cuando  $S_1$  es de la forma  $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n A$ , donde cada  $Q_i x_i$  es o " $(x)$ " o " $(Ex)$ ",  $x_i \neq x_j$ , y  $A$  contiene cuando menos una ocurrencia de cada  $x_i$  y en contraste a las fórmulas complejas  $A$  no contiene ningún cuantificador. Por tanto, una forma normal prenexa es aquella fórmula que consiste en una secuencia de cuantificadores - llamado - "prefijo" - seguida inmediatamente de una fórmula abierta - llamada - "matriz".

Ahora bien, dada una fórmula cualquiera, en forma normal prenexa, hay dos maneras diferentes de determinar su validez de acuerdo al algoritmo propuesto en la presente tesis: directamente, o reduciendo a una fórmula básica equivalente.

A) Las reglas para determinar directamente la validez de una fórmula  $S_1$  cualquiera en forma normal prenexa, son las siguientes:

(1) Eliminar de la matriz de  $S_1$ , mediante definiciones conocidas a todas las conectivas " $\rightarrow$ ", " $\leftrightarrow$ ", etc., de tal modo que, las únicas conectivas que aparezcan en ella sean únicamente " $\vee$ ", " $\wedge$ " y/o " $\sim$ ". internada esta última.

(2) De acuerdo al tipo de prefijo de  $S_1$  resultante del paso anterior prosígase como sigue:

a) Si el prefijo de  $S_1$  está integrado únicamente por U-cuantificadores, bórrese al prefijo y aplíquese la regla R1 identificando a cada U-operando por su variable individual.

b) Si el prefijo de  $S_1$  está integrado únicamente por E-cuantificadores, bórrese al prefijo y aplíquese la regla R2 a su matriz.

c) Si el prefijo de  $S_1$  está integrado por U- y E-cuantificadores, bórrese al prefijo y hállese la FNC de la matriz- (siempre que en el prefijo el número de los U-cuantificadores sea  $\geq 2$ , y únicamente en ese caso), y aplíquese la regla R3, identificando a cada operando por su variable individual.

B) Para determinar la validez de  $S_1$  reduciendo a otra fórmula equivalente básica  $S_1'$ , es suficiente con aplicar el método de reducción



de fórmulas complejas a fórmulas básicas - ya que  $S_1$  no es mas un tipo de fórmula no básica- prescrita en la primera parte de esta sección.

ALGUNOS EJEMPLOS DE LA APLICACION DE ESTAS REGLAS

DE ACUERDO AL PRIMER METODO.

$$(1) \quad S_1 \quad \begin{aligned} & (Ex) (y) ( (Fx.Gx) \rightarrow Fy ) \\ & (Ex) (y) ( \sim (Fx.Gx) \vee Fy ) \\ & (Ex) (y) ( \sim Fx \vee \sim Gx \vee Fy ) \\ & \sim Fv \sim GvF \end{aligned}$$

$S_1$  es válida.

$$(2) \quad S_1 \quad \begin{aligned} & (Ex) (y) (z) (Eu) (Fx. \sim Gy. v. \sim FzvGu) \\ & \text{Borrando el prefijo y hallando la FNC:} \\ & Fxv \sim FzvGu. \sim Gyv \sim FzvGu \\ & Fv \sim FvG. G_1 v \sim G_1 vG_2 \end{aligned}$$

$S_1$  es válida.

$$(3) \quad S_1 \quad \begin{aligned} & (x) (y) (z) (u) ( (FxvGy.Hy) \rightarrow ( \sim Fz \rightarrow Gu ) ) \\ & (x) (y) (z) (u) ( \sim (FxvGy.Hy) \vee (FzvGu) ) \\ & (x) (y) (z) (u) ( \sim (FxvGy) \vee \sim Hy \vee (FzvGu) ) \\ & (x) (y) (z) (u) ( ( ( \sim Fx. \sim Gy ) \vee \sim Hy ) \vee (FzvGu) ) \\ & ( \sim F_1. \sim G_2. v. \sim H_2 ) \vee (F_3 vG_4) \\ & ( \sim F_1 v \sim H_2. \sim G_2 v \sim H_2 ) \vee (F_3 vG_4) \end{aligned}$$

$S_1$ , patentemente no es válido.

$$(4) \quad S_1 \quad \begin{aligned} & (Ex) (y) (Ez) (u) ( (Fx.Gy) \rightarrow (Fz.Gu) ) \\ & (Ex) (y) (Ez) (u) ( \sim (Fx.Gy) \vee (Fz.Gu) ) \\ & (Ex) (y) (Ez) (u) ( ( \sim Fx \vee \sim Gy ) \vee (Fz.Gu) ) \\ & ( \sim Fx \vee \sim Gy \vee Fz ). ( \sim Fx \vee \sim Gy \vee Gu ) \\ & ( \sim Fv \sim GvF ). ( \sim F_1 v F_2 v \sim G_1 v G_2 ) \end{aligned}$$



$$(5) \quad S_1 \quad (Ex)(Ey)(Ez)(Et)(Ew)(Eu)(Fx \rightarrow Gy.Gz \rightarrow Ht. \rightarrow .Fw \rightarrow Hu)$$

$$(\sim (Fx \rightarrow Gy.Gz \rightarrow Ht) \vee (\sim Fw \vee Hu))$$

$$(\sim (Fx \rightarrow Gy) \vee \sim (Gz \rightarrow Ht). \vee. (\sim Fw \vee Hu))$$

$$(Fx. \sim Gy) \vee (Gz. \sim Ht). \vee. (\sim Fw \vee Hu)$$

$$(\sim F. \sim G) \vee (\sim H. \sim H) \vee (\sim F \vee H)$$

$$\sim G \vee \sim H \vee F \vee H$$

$S_1$  es válida.

DE ACUERDO AL SEGUNDO METODO

$$(1) \quad S_1 \quad (x)(y)(Ux \rightarrow Rx) \rightarrow (Uy \rightarrow My)$$

$$(x)(y)(\sim (Ux \rightarrow Rx) \vee (\sim Uy \vee My))$$

$$(x)(y)((Ux. \sim Rx) \vee (\sim Uy \vee My))$$

$$(x)((Ux. \sim Rx) \vee (y)(\sim Uy \vee My))$$

$$(x)(Ux. \sim Rx) \vee (y)(\sim Uy \vee My) \quad \text{Unificando las "x's":}$$

$$S' \quad (x)(Ux. \sim Rx) \vee (x)(\sim Ux \vee Mx) \quad \text{Aplicando R1:}$$

$$S'_p \quad (U_1. \sim R_1) \vee (\sim U_2 \vee M_2)$$

$S_1$  no es válida.

$$(2) \quad S_1 \quad (x)(y)(Ez)(Lx \rightarrow (Py.My \rightarrow Mz))$$

$$(x)(y)(Ez)(\sim Lx \vee (\sim (Py.My) \vee Mz))$$

$$(x)(y)(Ez)(\sim Lx \vee ((\sim Py \vee \sim My) \vee Mz)) \quad \text{Internando a los cuantif.:$$

$$(x) \sim Lx. \vee. (y)(\sim Py \vee \sim My) \vee (Ez)Mz \quad \text{Unificando las "x's":}$$

$$S' \quad (x) \sim Lx. \vee. (x)(\sim Px \vee \sim Mx) \vee (Ex)Mx \quad \text{Aplicando R}_3:$$

$$S'_p \quad \sim L_1. \vee. (\sim P_2 \vee \sim M_2) \vee M_1 \vee M_2$$

$$\sim M_2 \vee M_2$$



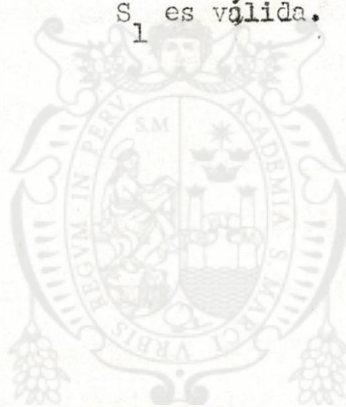
$$\begin{aligned}
 (3) \quad S_1 \quad & (Ex) (y)(z)(Ex \rightarrow Gy \cdot \rightarrow \cdot Fz \rightarrow Gz) \\
 & (Ex) (y)(z)(\sim(Fx \rightarrow Gy) \vee (Fz \rightarrow Gz)) \\
 & (Ex) (y)(z)((Fx \cdot \sim Gy) \vee (\sim Fz \vee Gz)) \\
 & (Ex) (y)((Fx \cdot \sim Gy) \vee (z)(\sim Fz \vee Gz)) \\
 & (Ex) ((y)(Fx \cdot \sim Gy) \vee (z)(\sim Fz \vee Gz)) \\
 & (Ex) ((Fx \cdot (y) \sim Gy) \vee (z)(\sim Fz \vee Gz)) \\
 & (Ex) (Fx \cdot (y) \sim Gy) \cdot \vee \cdot (z)(\sim Fz \vee Gz) \\
 & (Ex) Fx \cdot (y) \sim Gy \cdot \vee \cdot (z)(\sim Fz \vee Gz) \\
 S' \quad & (Ex) Fx \cdot (x) \sim Gx \cdot \vee \cdot (x)(\sim Fx \vee Gx) \\
 & (Ex) Fx \vee (x)(\sim Fx \vee Gx) \cdot (x) \sim Gx \vee (x)(\sim Fx \vee Gx) \\
 S'_p \quad & Fv FvG \cdot G_1 \vee F_2 \vee G_2 \\
 & S \text{ no es válida.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad S_1 \quad & (Ex)(Ey)(z)(u)(Gx \rightarrow (Cy \rightarrow Gy) \cdot \rightarrow \cdot (Pz \cdot Tz \cdot Gz) \rightarrow (Cu \rightarrow Tu)) \\
 & (Ex)(Ey)(z)(u)(\sim(Gx \rightarrow (Cy \rightarrow Gy)) \cdot \vee \cdot \sim(Pz \cdot Tz \cdot Gz) \vee (Cu \rightarrow Tu)) \\
 & (Ex)(Ey)(z)(u)(Gx \cdot \sim(Cy \rightarrow Gy) \cdot \vee \cdot (\sim Pz \vee \sim Tz \vee \sim Gz) \vee (\sim Cu \vee Tu)) \\
 & (Ex)(Ey)(z)(u)(Gx \cdot (Cy \cdot \sim Gy) \cdot \vee \cdot (\sim Pz \vee \sim Tz \vee \sim Gz) \vee (\sim Cu \vee Tu)) \\
 & (Ex)(Ey)(Gx \cdot (Cy \cdot \sim Gy) \cdot \vee \cdot (z)(u)((\sim Pz \vee \sim Tz \vee \sim Gz) \vee (\sim Cu \vee Tu))) \\
 & (Ex)(Ey)(Gx \cdot (Cy \cdot \sim Gy)) \vee (z)(u)((\sim Pz \vee \sim Tz \vee \sim Gz) \vee (\sim Cu \vee Tu)) \\
 & (Ex)(Gx \cdot (Ey)(Cy \cdot \sim Gy)) \vee (z)(\sim Pz \vee \sim Tz \vee \sim Gz) \vee (u)(\sim Cu \vee Tu) \\
 & (Ex)Gx \cdot (Ey)(Cy \cdot \sim Gy) \cdot \vee \cdot (z)(\sim Pz \vee \sim Tz \vee \sim Gz) \vee (u)(\sim Cu \vee Tu) \\
 & (Ex)Gx \cdot (Ex)(Cx \cdot \sim Gx) \cdot \vee \cdot (x)(\sim Px \vee \sim Tx \vee \sim Gx) \vee (x)(\sim Cx \vee Tx) \\
 & (Ex)Gx \vee (x)(\sim Px \vee \sim Tx \vee \sim Gx) \vee (x)(\sim Cx \vee Tx) \cdot (Ex)(Cx \cdot \sim Gx) \vee \\
 & \quad (x)(\sim Px \vee \sim Tx \vee \sim Gx) \vee (x)(\sim Cx \vee Tx) \\
 & G_1 \vee G_2 \vee (\sim P_1 \vee \sim T_1 \vee \sim G_1) \vee (\sim C_2 \vee T_2) \cdot (C_1 \cdot \sim G_1) \vee (G_2 \cdot \sim G_2) \vee \\
 & \quad (\sim P_1 \vee \sim T_1 \vee \sim G_1) \vee (\sim C_2 \vee T_2) \\
 & G_1 \vee G_2 \vee \sim P_1 \vee \sim T_1 \vee \sim G_1 \vee \sim C_2 \vee T_2 \cdot \sim C_1 \vee \sim G_2 \vee \sim P_1 \vee \sim T_1 \vee \\
 & \quad \sim G_1 \vee \sim C_2 \vee T_2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (5) \quad S_1 \quad & (x)(Ey)(Ez)(Fx.Gx. \rightarrow .Fy.Gz) \\
 & (x)(Ey)(Ez)(\sim (Fx.Gx) \vee (Fy.Gz)) \\
 & (x)(Ey)(Ez)( (\sim Fx \vee \sim Gx) \vee (Fy.Gz) ) \\
 & (x)( (\sim Fx \vee \sim Gx) \vee (Ey)(Ez)(Fy.Gz) ) \\
 & (x)(\sim Fx \vee \sim Gx) \vee (Ey)(Fy.(Ez)Gz) \\
 & (x)(\sim Fx \vee \sim Gx). \vee. (Ey)Fy.(Ez)Gz \\
 S' \quad & (x)(\sim Fx \vee \sim Gx). \vee. (Ex)Fx.(Ex)Gx \\
 & (x)(\sim Fx \vee \sim Gx) \vee (Ex)Fx. (x)(\sim Fx \vee \sim Gx) \vee (Ex)Gx \\
 & (\sim F \vee \sim G) \vee F. (\sim F \vee \sim G) \vee G
 \end{aligned}$$

$S_1$  es válida.





3. REGLAS DECISORIAS PARA FORMULAS QUE CONTIENEN CONSTANTES INDIVIDUALES.

RI. Sea S una fórmula cuantificacional cualquiera, monádica y cerrada, sin signos de igualdad, con constantes individuales, con o sin letras proposicionales. Para determinar su validez, elimínese previamente de esta fórmula a todas las conectivas " $\rightarrow$ ", " $\leftrightarrow$ ", etc., sustituyendo por sus equivalentes respectivos, hasta reducir a otra fórmula equivalente S'tal que ésta última exhiba únicamente las conectivas " $\vee$ ", " $\wedge$ " y/o " $\neg$ ". como siempre, internada ésta última. Si S es una fórmula no básica basta reducirla a otra fórmula equivalente básica aplicando el método de reducción expuesto en la sección inmediata precedente. Ahora bien, una vez lograda la fórmula S', esta tendrá cualesquiera de las siguientes formas (enumeradas siguiendo el orden de los teoremas que fundamentan su decidibilidad en las segunda parte de esta tesis):

$$\text{IV. } (x)A_1 \dots (x)A_m, Ca_1, \dots, Ca_r$$

$$\text{V. } (Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n, Ca_1, \dots, Ca_r$$

$$\text{VI. } (x)A_1, \dots, (x)A_m, (Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n, Ca_1, \dots, Ca_r$$

es decir, una secuencia finita de U-fórmulas y fórmulas predicativas que exhiben constantes individuales, o una secuencia finita de E-fórmulas y fórmulas predicativas que exhiben constantes individuales, o una secuencia finita de U- y E-fórmulas y fórmulas predicativas que exhiben constantes individuales. Las reglas para determinar la validez de cualquier fórmula de cualesquiera de estas formas son las siguientes:

R4. Si S' es de la forma  $(x)A_1, \dots, (x)A_m, Ca_1, \dots, Ca_r$ , bórrese a todos los cuantificadores, variables y constantes individuales y, luego:

- (1) adscribáse subíndices a las letras predicados de los U-esquemas, conforme a la regla R1.
- (2) Empleando subíndices distintos a las anteriores adscribáse un mismo subíndice a todas las letras predicados que provengan de borrar una misma constante individual, y subíndices de distintos a las que provengan de borrar constantes individuales distintas.



(3)  $S (S', \text{etc.})$  será 1-válida únicamente, si el esquema  $S'_p$  resultante de estas operaciones es veritativo-funcionalmente válida.

R5. Si  $S'$  es de la forma  $(Ex)B_1 \dots (Ex)B_n, Ca_1 \dots Ca_r$ :

- A) Si en  $S'$  el número de tipos de letras constantes individuales es  $\leq 1$ , y en  $(Ex)B_i$   $i$  es  $1 \leq i \leq n$ . Para determinar la validez de  $S'$  bórrese a todos los cuantificadores, variables y constantes individuales, y determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante.
- B) Si en  $S'$  el número de tipos de letras constantes individuales es  $\geq 2$  y el número de E-fórmulas es como en A), para determinar la validez de  $S'$  efectúese sucesivamente los siguientes pasos:

1.- Hállase la forma normal conjuntiva de  $S'$ , tomando a cada  $(Ex)B_i$  y  $Ca_i$  en bloque, como si fueran letras proposicionales.

2.- Determínese la validez de cada miembro de la FNC hallada, como sigue:

(2.1) Si el miembro de la FNC es de la forma  $(Ex)B_1 v \dots v (Ex)B_n v Ca_1 v \dots v Ca_r$  (donde  $r$  es el cardinal de la variedad de tipos de letras constantes individuales), bórrese a todos los cuantificadores, variables y constantes individuales, y luego

1° sustitúyase a cada E-esquema  $B_i$  por la disyunción de  $r$  miembros  $B_{i_1} v \dots v B_{i_r}$ .

2° adscribábase un mismo subíndice a todas las letras - predicados de cada par de fórmulas  $(B_i, C)$  usando un subíndice distinto para cada par cuyo miembro  $C$  provenga de borrar una constante individual distinta,

3° determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante de estas operaciones.

(2.2) Si el miembro de la FNC es de la forma  $Ca_1 v \dots v Ca_r$ , determínese su validez, aplicando cualquier procedimiento decisorio proposicional. En la práctica, una vez hallada la FNC, los pasos (2.1) - (2.2) pueden efectuarse simultáneamente.

C)  $S (S', \text{etc.})$  será 1-válida únicamente si el esquema  $S'_p$  resultante, en cada caso es veritativo-funcionalmente válido.



R6. Si  $S'$  es de la forma  $(x)A_1 \dots (x)A_m, (Ex)B_1 \dots (Ex)B_n, Ca_1 \dots Ca_r$ , efectúese sucesivamente los siguientes pasos:

- (1) Siempre que se considere conveniente y sea posible, redúzcase el número de los cuantificadores, empleando las equivalencias dadas en la regla R3 con este objeto.
- (2) Hállese la forma normal conjuntiva de  $S'$ .
- (3) Determínese la validez de cada miembro de la FNC, como sigue:

(3.1) Si el miembro de la forma normal conjuntiva es de la forma  $(x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m \vee (Ex)B_1 \vee \dots \vee (Ex)B_n \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r$ , donde  $m, n$  y  $r$  son  $\geq 1$ , bórrese a todos los cuantificadores, variables y constantes individuales, y luego:

1° sustitúyase a cada E-esquema  $B_i$  por la disyunción de  $m + r$  miembros  $B_{i1} \vee \dots \vee B_{i_{m+r}}$ , donde  $r$  es el cardinal de

la variedad de tipos de letras constantes individuales.

2° adscribáse un mismo subíndice a cada par de fórmulas  $(B_i C)$ , usando un subíndice distinto para cada par cuyo miembro  $A$ , es distinto o cuyo miembro  $C$  proviene de borrar una constante individual distinta.

3° Determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante de estas operaciones.

(3.2) A los demás miembros de la FNC, aplíquese simplemente las reglas R1-R5, según sea el caso.

- (4)  $S$  ( $S'$ , etc.) será l-válida únicamente si el esquema  $S'_p$  resultante es veritativo-funcionalmente válido en cada caso.



ALGUNOS EJEMPLOS DE LA APLICACION DE ESTAS REGLAS

SOBRE LA FORMA IV.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad S & \quad (Ex)(\sim MxvCx). \sim Ca. \longrightarrow . \sim Ma \\
 & \quad \sim ((Ex)(\sim MxvCx). \sim Ca)v \sim Ma \\
 & \quad \sim (Ex)(\sim MxvCx)vCa.v. \sim Ma \\
 & \quad (x) \sim (\sim MxvCx)vCa.v. \sim Ma \\
 S' & \quad (x)(Mx. \sim Cx)vCa.v \sim Ma \\
 S'_p & \quad (M_1. \sim C_1)vC_2.v. \sim M_2
 \end{aligned}$$

S no es válida.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad S & \quad P \longrightarrow (Ex)(Tx.Bx).Ba. \longrightarrow .(Ta \longrightarrow P) \\
 & \quad \sim (P \longrightarrow (Ex)(Tx.Bx).Ba)v(Ta \longrightarrow P) \\
 & \quad \sim (P \longrightarrow (Ex)(Tx.Bx))v \sim Ba.v.(Ta \longrightarrow P) \\
 & \quad \sim (\sim Pv(Ex)(Tx.Bx))v \sim Ba.v.(\sim TavP) \\
 P. & \quad \sim (Ex)(Tx.Bx)v \sim Ba.v.(\sim TavP) \\
 P.(x) & \quad \sim (Tx.Bx)v \sim Ba.v.(\sim TavP) \\
 S' & \quad P.(x)(\sim Txv.Bx)v \sim Ba.v.(\sim TavP) \\
 S'_p & \quad P.(\sim T_1vB_1)v B_2.v.(\sim T_2vP) \\
 & \quad Pv(\sim T_2vP).(\sim T_1vB_1)v \sim B_2v(\sim T_2vP)
 \end{aligned}$$

S no es válida.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad S & \quad (x)(Hx. \longrightarrow .PxvDx). \sim P_j.v.(x)(\sim Px \longrightarrow \sim Hx)v \\
 & \quad \sim D_j \\
 S' & \quad (x)(\sim HxvPxvDx). \sim P_j.v.(x)(Pxv \sim Hx)v \sim D_j \\
 S'_p & \quad \sim H_1vP_1vD_1). \sim P_2.v.(P_3v \sim H_3)v \sim D_2 \\
 & \quad (\sim H_1vP_1vD_1)v(P_3v \sim H_3)v \sim D_2. \sim P_2v(P_3v \sim H_3)v \sim D_2
 \end{aligned}$$

S no es válida.



$$\begin{aligned}
 (4) \quad S \quad & (Ex)(Mx \vee \sim Bx) \cdot (Ex)(Mx \cdot \sim Bx) \vee \sim Ma \longrightarrow \cdot Bav \sim Ma \\
 & \sim ((Ex)(Mx \vee \sim Bx) \cdot (Ex)(Mx \cdot \sim Bx) \vee \sim Ma) \cdot \vee \cdot Bav \sim Ma \\
 & \sim (Ex)(Mx \vee \sim Bx) \vee \sim ((Ex)(Mx \cdot \sim Bx) \vee \sim Ma) \cdot \vee \cdot Bav \\
 & \quad \sim Ma \\
 & (x) \sim (Mx \vee \sim Bx) \cdot \vee \cdot (Ex)(Mx \cdot \sim Bx) \cdot Ma \cdot \vee \cdot Bav \sim Ma \\
 & (x)(\sim Mx \cdot Bx) \cdot \vee \cdot (x) \sim (Mx \cdot \sim Bx) \cdot Ma \cdot \vee \cdot Bav \sim Ma \\
 & (x)(\sim Mx \cdot Bx) \cdot \vee \cdot (x)(\sim Mx \vee Bx) \cdot Ma \cdot \vee \cdot Bav \sim Ma \\
 & (\sim M_1 \cdot B_1) \cdot \vee \cdot (\sim M_2 \vee B_2) M_3 : \vee \cdot B_3 \vee \sim M_3 \\
 & (\sim M_1 \vee \sim M_2 \vee B_2) \cdot (\sim M_1 \vee M_3) \cdot (B_1 \vee \sim M_2 \vee B_2) \cdot (B_1 \vee M_3) \\
 & \quad : \vee \cdot B_3 \vee \sim M_3 \\
 & (\sim M_1 \vee \sim M_2 \vee B_2 \vee B_3 \vee \sim M_3) \cdot (\sim M_1 \vee M_3 \vee B_3 \vee \sim M_3) \cdot (B_1 \vee \\
 & \quad \sim M_2 \vee B_2 \vee B_3 \vee \sim M_3) \cdot (B_1 \vee M_3 \vee B_3 \vee \sim M_3) \\
 & \quad S \text{ no es válida.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad S \quad & Ha \longrightarrow (Ex)Hx \cdot Fb \longrightarrow (Ex)Fx \longrightarrow \cdot (x)(Hx \vee Fx) \\
 & \sim (Ha \longrightarrow (Ex)Hx \cdot Fb \longrightarrow (Ex)Fx) \vee (x)(Hx \vee Fx) \\
 & \sim (Hx \longrightarrow (Ex)Hx) \vee \sim (Fb \longrightarrow (Ex)Fx) \cdot \vee \cdot (x)(Hx \vee Fx) \\
 & Ha \cdot \sim (Ex)Hx \cdot \vee \cdot Fb \cdot \sim (Ex)Fx : \vee \cdot (x)(Hx \vee Fx) \\
 & Ha \cdot (x) \sim Hx \cdot \vee \cdot Fb \cdot (x) \sim Fx : \vee \cdot (x)(Hx \vee Fx) \\
 & H_1 \cdot \sim H_2 \cdot \vee \cdot F_3 \cdot \sim F_4 : \vee \cdot (H_5 \vee F_5)
 \end{aligned}$$

Es muy evidente, que S no es válida.

# SOBRE LA FORMA V.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad S \quad & (x)(Gx \longrightarrow Mx) \cdot Ga \longrightarrow \cdot Ma \\
 & \sim ((x)(Gx \longrightarrow Mx) \cdot Ga) \vee Ma \\
 & \sim (x)(Gx \longrightarrow Mx) \vee \sim Ga \cdot \vee \cdot Ma \\
 & (Ex) \sim (Gx \longrightarrow Mx) \vee \sim Ga \cdot \vee \cdot Ma \\
 & (Ex)(Gx \cdot \sim Mx) \vee \sim Ga \cdot \vee \cdot Ma \\
 & (G \cdot \sim M) \vee \sim G \cdot \vee \cdot M
 \end{aligned}$$



(2) S  $(x)(Tx \rightarrow Vx) \rightarrow \text{CavPb} \wedge \text{Pb} : \rightarrow :$   
 $\text{Cav}(\text{Ex})(Tx \wedge Vx)$   
 $\sim (\sim (x)(Tx \vee Vx) \vee \text{CavPb} \wedge \text{Pb}) \vee$   
 $\text{Cav}(\text{Ex})(Tx \wedge Vx)$   
 $(x)(\sim Tx \vee Vx) \wedge (\text{CavPb} \wedge \text{Pb}) \vee \text{Cav}(\text{Ex})$   
 $(Tx \wedge Vx)$   
 $(x)(\sim Tx \vee Vx) \wedge ((\text{CavPb} \vee \text{Pb}) \vee \text{Cav}(\text{Ex})$   
 $(Tx \wedge Vx)$   
 $(x)(\sim Tx \vee Vx) \wedge (\text{Cav} \wedge \text{Pb} \wedge \text{Pb}) \vee \text{Cav}$   
 $(\text{Ex})(Tx \wedge Vx)$

$(x)(\sim Tx \vee Vx) \vee \text{Cav}(\text{Ex})(Tx \wedge Vx) \wedge (\sim \text{Cav}$   
 $\text{Pb} \vee \text{Pb}) \vee \text{Cav}(\text{Ex})(Tx \wedge Vx)$

$(\sim T_1 \vee V_1) \vee C_2 \vee (T_1 \wedge V_1) \vee (T_2 \wedge V_2) \wedge (\sim P_1 \wedge$   
 $P_2 \vee P_2) \vee C_1 \vee (T_1 \wedge V_1) \vee (T_2 \wedge V_2)$

$\sim V_1 \vee V_1 \wedge \sim P_2 \vee P_2$

T

S es válida

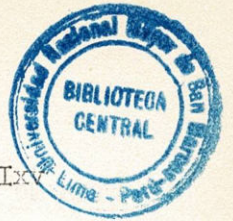
(3) S  $\text{Gr} \rightarrow (\text{Ex})(Px.Ix.Fx) \wedge (x)((Px.Ax) \rightarrow$   
 $Lx) \rightarrow \text{Gr} \rightarrow (\text{Ex})(Px.Ax \wedge Lx)$   
 $\sim (\sim \text{Grv}(\text{Ex})(Px.Ix.Fx) \wedge (x)(\sim (Px.$   
 $Ax) \vee Lx)) \vee \sim \text{Grv}(\text{Ex})(Px.Ax \wedge Lx)$   
 $\sim (\sim \text{Grv}(\text{Ex})(Px.Ix.Fx) \vee \sim (x)(\sim (Px.$   
 $Ax) \vee Lx) \vee \sim \text{Grv}(\text{Ex})(Px.Ax \wedge Lx)$   
 $\text{Gr} \wedge (\text{Ex})(Px.Ix.Fx) \vee (\text{Ex}) \wedge (\sim (Px.$   
 $Ax) \vee Lx) : v : \sim \text{Grv}(\text{Ex})(Px.Ax \wedge Lx)$   
 $\text{Gr} \wedge (x) \wedge (Px.Ix.Fx) \vee (\text{Ex})(Px.Ax \wedge$   
 $Lx) : v : \sim \text{Grv}(\text{Ex})(Px.Ax \wedge Lx)$   
 $\text{Gr} \wedge (x)(\sim Px \vee \sim Ix \vee \sim Fx) \vee (\text{Ex})(Px.$   
 $Ax \wedge Lx) : v : \sim \text{Grv}(\text{Ex})(Px.Ax \wedge Lx)$

$\text{Grv} \wedge \text{Grv}(\text{Ex})(Px.Ax \wedge Lx) \wedge (x)(\sim Px \vee \sim Ix \vee \sim Fx) \vee$   
 $(\text{Ex})(Px.Ax \wedge Lx) \wedge \text{Grv}(\text{Ex})(Px.Ax \wedge Lx)$

$\text{Grv} \wedge \text{Grv}(P.A.L) \wedge (\sim P_1 \vee \sim I_1 \vee \sim F_1) \vee (P_1.A_1 \wedge L_1) \vee (P_2.A_2$   
 $\wedge L_2) \vee \sim G_2 \vee (P_2.A_2 \wedge L_2) \vee (P_1.A_1 \wedge L_1)$

S no es válida.





(4)

S

$(x)(Gx \rightarrow .Fx.Mx) \cdot (x)(Mx \rightarrow .IxvSx) \cdot Ga \rightarrow (x)(Gxv \sim Mx)$   
 $\rightarrow ((x)(Gx \rightarrow .Fx.Mx) \cdot (x)(Mx \rightarrow .IxvSx) \cdot Ga) v (x)(Gxv \sim Mx)$   
 $\rightarrow (x)(Gx \rightarrow .Fx.Mx) v (x)(Mx \rightarrow .IxvSx) v Ga.v.(x)(Gxv \sim Mx)$   
 $(Ex) \sim (Gx \rightarrow .Fx.Mx) v (Ex) \sim (Mx \rightarrow .IxvSx) v Ga.v.(x)(Gxv \sim Mx)$   
 $(Ex)(Gx \sim (Fx.Mx)) v (Ex)(Mx \sim IxvSx)$   
 $v \sim Ga.v.(x)(Gxv \sim Mx)$

S'

$(Ex)(Gx \sim Fxv \sim Mx) v (Ex)(Mx \sim IxvSx)$   
 $\sim Sx) v Ga.v.(x)(Gxv \sim Mx)$

S'<sub>p</sub>

$(G_1 \sim F_1 v \sim M_1) v (G_2 \sim I_2 v \sim M_2)$   
 $v (M_2 \sim I_1 v \sim S_1) v (M_2 \sim I_2 v \sim S_2)$   
 $v G_1 v (G_2 v \sim M_2)$   
 $\sim F_1 v \sim M_1 v \sim I_2 v \sim M_2 v \sim I_1 v \sim S_1 v \sim I_2$   
 $v \sim S_2 v \sim G_1 v \sim G_2 v \sim M_2$

S no es válida

(5)

S

$Pc \rightarrow (Ex)Px.(x)(Px \rightarrow Rx).(x)(Px \rightarrow Fx) \rightarrow .RcvFc$   
 $(Pc \rightarrow (Ex)Px.(x)(Px \rightarrow Rx).(x)(Px \rightarrow Fx)) \cdot v.RcvFc$   
 $(Pc \rightarrow (Ex)Px) v (x)(Px \rightarrow Rx) v (x)(Px \rightarrow Fx) \cdot v.RcvFc$   
 $(Pc \sim (Ex)Px.v.(Ex) \sim (Px \rightarrow Rx).v.(Ex) \sim (Px \rightarrow Fx) : v: RcvFc$

S'

$Pc.(x) \sim Px.v.(Ex)(Px \sim Rx).v.(Ex)(Px \sim Fx) : v: RcvFc$

$Pcv(Ex)(Px \sim Rx)v(Ex)(Px \sim Fx).(x) \sim Pxv(Ex)(Px \sim Rx)v(Ex)(Px \sim Fx) : v: RcvFc$

$Pcv(Ex)(Px \sim Rx)v(Ex)(Px \sim Fx)vRcvFc.(x) \sim Pxv(Ex)(Px \sim Rx)v(Ex)(Px \sim Fx)vRcvFc$

S'<sub>p</sub>

$Pv(P \sim R)v(P \sim F)vRvF : P_1 v(P_1.R_1)$   
 $v(P_2 \sim R_2)v(P_2 \sim F_2)vR_2vF_2$



UNA BREVE REFERENCIA A LA PROCEDENCIA DE ALGUNOS EJEMPLOS DE ESTA

PRIMERA PARTE.

1.- DE LA REGLA R2

- (1) Fórmula demostrado como teorema por B. Mates dentro de un sistema de derivación, en LOGICA ELEMENTAL, p. 153, Ed. Tecnos, Madrid, 1970.

2.- DE LA REGLA R3

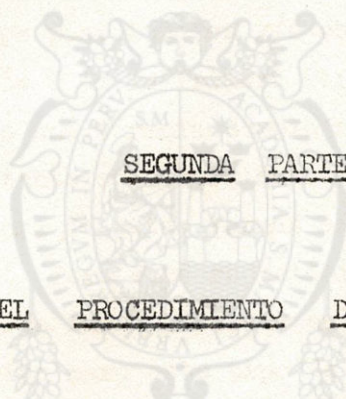
- (1) Fórmula demostrado por I. Copi en SYMBOLIC LOGIC, P. 82 The Macmillan Company, New York, 1970.
- (2) Ibid. p. 83
- (3) Ibid. p. 84
- (4) Ibid. p. 88
- (5) Ibid. p. 89
- (6) Fórmula demostrado por p. Suppes en INTRODUCCION A LA LOGICA SIMBOLICA, p. 118. CECSA, México, 1966.
- (7) Ibid. p. 94
- (8) Ibid. p. 92
- (9) Ibid. p. 126
- (10) Fórmula demostrado por W. V. O. Quine mediante su procedimiento decisorio en LOS METODOS DE LA LOGICA, p. 168. Ariel, Barcelona, 1969.

3.- DE LA REGLA R5

- (2) Suppes, Ibid. p. 95

Los demás ejemplos también proceden de estos autores, fundamentalmente de la obra citada de Copi; aunque, los ejemplos de las reglas R1 y R4 son en su totalidad de una construcción arbitraria.





SEGUNDA PARTE

FUNDAMENTOS DEL PROCEDIMIENTO DECISORIO PROPUESTO



En esta parte se presenta la fundamentación de las reglas del procedimiento decisorio propuesto en la presente tesis. Es decir, se trata de demostrar que el conjunto de reglas presentadas en las páginas anteriores constituyen un método efectivo para decidir la validez de cualquier fórmula cuantificacional monádica y cerrada de la Lógica de Primer Orden. Para demostrar esto, es suficiente demostrar

- 1) Que toda fórmula cuantificacional monádica y cerrada no básica  $S_1$  de la Lógica de Primer Orden es reductible a otra fórmula equivalente básica  $S'$ .
- 2) Que toda fórmula monádica básica y cerrada  $S'$  es decidible.

1) Sea  $S_1$  una fórmula cerrada no básica, sin signos de igualdad, con o sin letras proposicionales y/o constantes individuales. De acuerdo a la sección 2 de la Primera Parte una fórmula monádica no básica  $S_1$  puede ser o una fórmula compleja o una fórmula en forma normal prenexa. Por tanto se deberá demostrar que toda fórmula no básica  $S_1$  en cualesquiera de estas formas es reductible a otra fórmula básica equivalente  $S'$ . Pero esta reductibilidad de fórmulas no básicas a fórmulas básicas ya fue demostrada en la sección 2 a propósito de las reglas decisorias para este tipo de fórmulas. Por tanto, repetir la aquí sería redundante, en cualquier caso, debiendo remitirse, en consecuencia, simplemente a dicha sección.

Ahora bien, una vez reducida una fórmula monádica no básica  $S_1$  a otra fórmula monádica básica equivalente  $S'$ , esta última podrá ser de cualesquiera de las siguientes formas :

- I.  $(x)A_1, \dots, (x)A_m$
- II.  $(Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n$
- III.  $(x)A_1, \dots, (x)A_m, (Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n$
- IV.  $(x)A_1, \dots, (x)A_m, Ca_1, \dots, Ca_r$
- V.  $(Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n, Ca_1, \dots, Ca_r$
- VI.  $(x)A_1, \dots, (x)A_m, (Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n, Ca_1, \dots, Ca_r$

es decir, fórmulas básicas, donde:

- a) Las únicas conectivas proposicionales que interviene son "v", "y/o" y/o "¬" internadas ésta última (esto es, afectando únicamente a los átomos).



b) En una fórmula cualquiera  $(x)A_i$ ,  $(Ex)B_i$  o  $Ca_i$   $i \geq 1$ .

c)  $m, n$  y  $r$  son enteros positivos finitos cualesquiera.

(Claro está que, S' presentaría otras formas más si se tomaran en cuenta a las posibles letras proposicionales que pudieran aparecer en ella, pero la presencia de tales letras es irrelevante, como se verá al final de esta Segunda Parte).

2) Sea S' una fórmula monádica, básica y cerrada, sin signos de igualdad, con o sin letras proporcionales y/o constante individuales, donde las únicas conectivas proporcionales que aparecen son "v", ".", y/o "~~~~~", internada esta última. De acuerdo a la prueba precedente, S' puede adoptar seis formas distintas. Por tanto, para demostrar que toda fórmula S' de estas características es decidible será suficiente con demostrar que una fórmula cualquiera que posea cualesquiera de aquellas seis formas es decidible. (En consecuencia, para demostrar que cualquier fórmula monádica (en sentido general) es decidible, será suficiente con reducirla a otra fórmula básica equivalente S' eliminando en aquella fórmula a toda conectiva que no sea "v", ".", y/o "~~~~~" internada esta última, mediante ciertas definiciones conocidas)

La demostración de la decidibilidad de la validez de S' se llevará a cabo mediante seis teoremas correspondientes a las seis formas de esta fórmula, como sigui.

TEOREMA I. Sea S' de la forma  $(x)A_1, \dots, (x)A_m$ , donde, como en la página 3 hay un número  $m$  (finito),  $1 \leq i \leq m$ , de U-fórmulas básicas y las únicas conectivas proporcionales que intervienen en esta fórmula son "v", ".", y/o "~~~~~" internada esta última. Toda fórmula que posea estas características es decidible.

PRUEBA.- Dada cualquier fórmula S' de la forma  $(x)A_1, \dots, (x)A_m$  hay una fórmula equivalente  $S'_c$  en forma normal disyuntiva que se obtiene a partir de las U-fórmulas de S' tomando a cada  $(x)A_i$  en bloque como si fuera simplemente una letra proposicional. Sea

$$((x)A_1, \dots, (x)A_k)_1 v, \dots v ((x)A_1, \dots, (x)A_k)_m \quad S'_c$$
 la FND así obtenida. En esta fórmula, a fin de que la demostración resulte lo más claro y sencillo posible (sin renunciar por ello ni al rigor ni a la generalidad) podemos hacer las siguientes modificaciones. Por un lado, en virtud de la equivalencia  $(x)A_1, \dots, (x)A_k \iff$



$(x) (A_1 \dots A_k)$  transformamos a cada miembro  $i$  de  $S'_C$  en una fórmula de la forma  $(x) (A_1 \dots A_k)_i$ ; por otro lado, en cada miembro  $i$  así transformado denotaremos a cada operando  $(A_1 \dots A_k)_i$  solamente con una sola letra mayúscula  $A$ . De este modo,  $S'_C$  se convierte a otra fórmula esquemáticamente equivalente.

$$(x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m \quad S''_C$$

Ahora bien, para demostrar que  $S'$  es decidible será suficiente con demostrar que cualquier fórmula de la forma  $S''_C$  es decidible; y para demostrar que  $S''_C$  es decidible será suficiente con demostrar que  $S''_C$  es l- válida si se satisface cuando menos una de las siguientes condiciones:

- (i) Que cuando menos una  $(x)A_i$  cualquiera sea l-válida,
- (ii) Que cuando menos una  $(x)A_i$  implique a una  $(x)A_j$ .

Por tanto,  $S''_C$  será decidible únicamente si en cualesquiera de estos casos hay algún procedimiento efectivo para determinar su validez.

CASO (i).- Una fórmula  $(x)A_i$  cualquiera es l-válida únicamente si su operando es tautológicamente válido. Esta aserción se sigue de los siguientes básica - por definición - el operando es siempre un esquema abierto, y un esquema abierto en lo que respecta a la validez siempre se comporta exactamente igual que los esquemas proposicionales. Por tanto, de aquí se sigue, que  $(x)A_i$  será l-válida únicamente si su operando  $A_i$  es tautológicamente válido. De este modo, será siempre posible saber en  $S''_C$  si alguna fórmula  $(x)A_i$  es l-válida, o no, y en consecuencia si  $S'$  es l-válida o no, para la cual será suficiente con borrar al U-cuantificador de cada  $(x)A_i$  en  $S''_C$  y luego manipular veritativo-funcionalmente al operando  $A_i$ . Pero además, en el operando  $A_i$  podemos borrar también a las variables individuales, ya que, como dice Quine en una situación semejante: "...de ello no puede resultar ambigüedad alguna, pues basta con que sobreentendamos una "x" tácita detrás de cada letra mayúscula..."<sup>1</sup>. Por esta razón, en lo sucesivo, . . . . .

1. W. V. O. Quine. LOS METODOS DE LA LOGICA, Segunda Parte, §19, P. 157, 2ª reimpresión, Ediciones Ariel, Barcelona 1969.



también en los demás teoremas se procederá en idéntica forma respecto a las variables individuales. Sea  $S'_p$  (o  $S''_p$ , etc.) el esquema asirresultante de borrar en una fórmula cuantificada a todos los cuantificadores y variables individuales.

CASO (ii).- Aquí hay los siguientes subcasos:

12.1\* Si  $i=2$ :

$S' \dots (x)A_1 \vee (x)A_2 \dots$   
 $\dots$   
 $\dots$   
 $\dots$

12. m. Si  $i=m$ :

$S' \dots (x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \dots \vee (x)A_m$

12.1.- Aquí supondremos que ningún miembro de la fórmula  $(x)A_1 \vee (x)A_2$  es 1-válida individualmente, porque si fuera así, nos veríamos retrotraídos simplemente, al caso (i). Por tanto,  $(x)A_1$  o  $(x)A_2$ , o ambos serán contingentes o inconsistentes.

(1).- Si  $(x)A_1$  y  $(x)A_2$  son contingentes ambas, es decir, son fórmulas que no resultan ser verdaderas para todas las interpretaciones de sus variables individuales y letras predicados, sino sólo para algunas y para otras no.- El condicional  $\sim (x)A_1 \longrightarrow (x)A_2$  es a su vez una fórmula contingente, puesto que su antecedente es una fórmula existencial contingente (dado que la negación de una fórmula contingente es a su vez otra fórmula contingente), cosa que se puede observar mejor en su equivalente:  $(\exists x)\sim A_1 \longrightarrow (x)A_2$ ; y ningún sistema lógico que emplea dominios no vacíos de interpretación permite la derivación de una fórmula universal contingente a partir de una fórmula existencial contingente.

(2).- Si  $(x)A_1$  es contingente y  $(x)A_2$  es inconsistente (contradictorio o lógicamente falso).- El condicional  $\sim (x)A_1 \longrightarrow (x)A_2$  no es una fórmula lógicamente válida, puesto que el antecedente

(\*).- En estas cifras que aparecen al lado izquierdo de cada subcaso de izquierda a derecha: los guarismos de la parte entera indican el número del teorema y del subcaso respectivamente; luego, el guarismo de la parte decimal (o guarismos) indica el valor de  $i$  en  $S'$ .



te de este condicional es contingente, mientras que su consecuente es inconsistente; por tanto, habrá cuando menos una asignación de los valores de verdad que asigne el valor "V" al antecedente, y como en este caso el consecuente siempre tiene el valor "F" el condicional resultará falso para esta interpretación.

(3).- Si  $(x)A_1$  es inconsistente y  $(x)A_2$  es consistente.- Aquí también el condicional  $\sim (x)A_1 \longrightarrow (x)A_2$  es lógicamente inválido. La demostración es similar al caso anterior.

(4).- Si  $(x)A_1$  y  $(x)A_2$  son ambas inconsistentes.- El condicional  $\sim (x)A_1 \longrightarrow (x)A_2$  es siempre lógicamente inválido, puesto que, su antecedente es lógicamente válido (ya que la negación de una fórmula inconsistente o lógicamente contradictorio es siempre una fórmula l-válida) y su consecuente es inconsistente.

Por tanto, de (1) - (4), se sigue, que ningún condicional de la forma  $(\exists x)\sim A_1 \longrightarrow (x)A_2$  es l-válida, a menos que su antecedente sea inconsistente o su consecuente sea lógicamente válido; pero decir esto último equivale simplemente a decir que el equivalente " $(x)A_1 \vee (x)A_2$ " de este condicional es l-válido si cuando menos  $(x)A_1$  es l-válido o  $(x)A_2$  es l-válido, y así, llegamos nuevamente al caso (i), y en consecuencia, a la conclusión decisiva de, que una fórmula de la forma  $(x)A_1 \vee (x)A_2$  es l-válida únicamente si cuando menos uno de sus miembros es l-válido, y sólo en este caso.

De este modo, dada una fórmula cualquiera de la forma  $(x)A_1 \vee (x)A_2$ , siempre será posible determinar su validez, para la cual, bastará proceder como en el caso (i), pero teniendo en cuenta la siguiente restricción: una vez borrados a todos los cuantificadores y variables individuales adscribese un mismo subíndice a todas las letras predicados de cada U-esquema, pero usando un subíndice distinto para cada caso. Esta restricción se deriva del siguiente hecho. Dada una fórmula cualquiera de la forma  $(x)A_1 \vee (x)A_2$ , puede ocurrir que ninguno de sus miembros sea l-válido, y por tanto, que esta fórmula no sea válida; pero, sin embargo, si simplemente se borrara a los cuantificadores y variables individuales, y no se adscribieran subíndices a las letras predicados, el esquema  $S'_p$  (es decir,  $A_1 \vee A_2$ ) podría resultar tautológicamente válido. Para evitar una consecuencia así desagradable



ble es lo que se prescribe esta restricción. Está claro que tal restricción sólo es necesario siempre cuando el número de U-cuantificadores es  $\geq 1$ .

Esta restricción para mayor claridad, podría ser ilustrado con el siguiente ejemplo. Sea  $(x)A_1 v(x)A_2$  la fórmula  $(x)(FxvGx)v(x)(\sim Fx. \sim Gx)$ , entonces, borrando simplemente a los cuantificadores y x's, tenemos el esquema  $S'_p : (FvG)v(\sim F. \sim G)$ , luego, distribuyendo "v" sobre ".":

$FvG \sim F. FvGv \sim G$  la fórmula  $(x)A_1(x)A_2$  resulta indebidamente válido. Mientras que adscribiendo subíndices, se tendría  $(F_1 v G_1)v(\sim F_2. \sim G_2)$ , y luego distribuyendo como antes:  $(F_1 v G_1 \sim G_2). (F_1 v G_1 v \sim G_2)$ , resulta un esquema no válido, como es debido

12.m. - Aplicando la siguiente equivalencia proposicional universalmente válido (al que abreviaremos con (E1) por comodidad):

$$\begin{aligned} (P_1 v P_2 v \dots v P_n) : \iff : \sim P_1 \longrightarrow (P_2 v \dots v P_n). v. \longrightarrow \sim \\ P_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow P_n \end{aligned} \quad (E1)$$

a la fórmula  $(x)A_1 v(x)A_2 v \dots v(x)A_m$ , tenemos:

$$S' \quad \sim (x)A_1 \longrightarrow ((x)A_2 v \dots v(x). v. \longrightarrow \sim (x)A_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow (x)A_m$$

y, ahora aplicando otra equivalencia igualmente válida:

$$\begin{aligned} P \longrightarrow (Q_1 v Q_2 v \dots v Q_n) : \iff : (P \longrightarrow Q_1) v (P \longrightarrow Q_2) v \dots v (P \longrightarrow \\ Q_n) \end{aligned} \quad (E2)$$

a cada uno de los condicionales con consecuencia compuesta en esta fórmula, tenemos:

$$\begin{aligned} S'_2 \quad \sim (x)A_1 \longrightarrow (x)A_2. v \dots v. \sim (x)A_1 \longrightarrow (x)A_m. v. \sim (x)A_2 \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow (x)A_m \end{aligned}$$

De esta manera, a la fórmula  $S''_c$  hemos reducido a una serie de disyunciones de condicionales elementales de la forma ya tratada en el subcaso 12.1. Por tanto, para determinar la validez de  $S'_1$  será suficiente con determinar veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S''_p$



que resulta de borrar en  $S'_1$  a todos los cuantificadores y variables individuales, y luego, adscribir un mismo subíndice a todas las letras predicados de cada U-esquema, pero siempre usando un subíndice distinto para cada U-esquema distinto de otro U-esquema  $A_j$ .

En esta forma se ha demostrado que cualquier fórmula de la forma  $(x)A_1, \dots, (x)A_m$  es decidible.

Pero, un procedimiento tal como se acaba de construir sería un tanto laborioso, ya que para cada fórmula  $S'$  habría que construir otra fórmula equivalente  $S'_c$ , y procedimiento donde se pudiera omitir este paso sería de más importancia práctica que ésta. Pero, afortunadamente, aquí también es posible omitir este paso, como sigue.

En primer lugar, entre las fórmulas  $S'$ ,  $S'_c$  y  $S'_p$  existen las siguientes relaciones:

(1) El conjunto de matrices de  $S'_p$  (es decir, reconstruyendo los U-operandos y variables individuales como en  $S'_c$ ) es idéntico al conjunto de matrices de  $S'_c$ , excepto en que, las matrices de  $S'_c$  tienen U-cuantificadores al frente.

(2) El conjunto de matrices de  $S'_c$  es veritativo-funcionalmente equivalente al conjunto de matrices de  $S'$ , excepto en que, las matrices de  $S'_c$  están en FND.

En segundo lugar, de los casos (i) y (ii) se sigue, que

(3)  $S'_c$  es 1-válido, únicamente si su estructura veritativo-funcional (es decir, el esquema  $S'_p$ ) es tautológicamente válida.

Pero, (1) y (2) implican a su vez :

(4) El conjunto de matrices de  $S'_p$  es veritativo-funcionalmente equivalente al conjunto de matrices de  $S'$ , y

finalmente, de (2), (3) y (4) se deduce:

(5)  $S'$  es 1-válida, únicamente si su estructura veritativo-funcional es tautológicamente válida.

Por tanto, las reglas decisorias para determinar la validez-

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú, Decana de América



de cualquier fórmula de la forma  $(x)A_1, \dots, (x)A_m$  que se derivan de este teorema son las siguientes :

RL. Para determinar la validez de cualquier fórmulas  $S'$  de la forma  $(x)A_1, \dots, (x)A_m$  basta proceder como sigue :

(1) Si el número de los U-cuantificadores es  $\leq 1$ , bórrese simplemente al U-cuantificador y variables individuales y, luego, determinese veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante.

(2) Si el número de los U-cuantificadores es  $\geq 2$ , bórrese a todos los U-cuantificadores y variables individuales y, luego, adscribábase un mismo subíndice a todas las letras predicados de cada U-esquema  $p_e$  pero, siempre usando un subíndice distinto para cada U-esquema  $A_i$  distinto de otro  $A_j$ , y finalmente, determinar veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante.

## TEOREMA II.

Sea  $S'$  una fórmula de la forma  $(Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n$ , donde, conforme a la página 3 hay un número  $n$  (finito)  $1 \leq i \leq n$ , de E-fórmulas básicas, y las únicas conectivas proposicionales que intervienen en esta fórmula son únicamente " $\vee$ ", " $\cdot$ " y/o " $\sim$ " internada esta última. Toda fórmula  $S'$  de esta forma es decidible.

PRUEBA.- Dada cualquier fórmula  $S'$  de la forma  $(Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n$ , hay una fórmula equivalente  $S'_c$  en forma normal conjuntiva, que se obtiene a partir de las E-fórmulas de  $S'$ , tomando a cada  $(Ex)B_i$  en bloque como si fuera simples letras proposicionales. Sea

$$((Ex)B_1 \vee \dots \vee (Ex)B_k)_1 \dots ((Ex)B_1 \vee \dots \vee (Ex)B_k)_n \quad S'_c$$

la FNC así obtenida. En esta fórmula, por las mismas razones que en el anterior teorema, también podemos hacer las simplificaciones necesarias. De este modo, por un lado, en virtud de la equivalencia

$((Ex)B_1 \vee \dots \vee (Ex)B_k) \iff (Ex)(B_1 \vee \dots \vee B_k)$  transformamos a cada miembro  $i$  de  $S'_c$  en una fórmula equivalente de la forma  $(Ex)(B_1 \vee \dots \vee B_k)_i$ ; por otro lado, en cada miembro  $i$  de  $S'_c$  así transformado denotaremos cada operando  $(B_1 \vee \dots \vee B_k)_i$  simplemente por una letra mayúscula  $B$  con un subíndice adscrita a ella. En esta forma, convertimos a  $S'_c$  en otra fórmula esquemáticamente equivalente



$$(Ex)B_1 \dots (Ex)B_n$$

$$S'_c$$

Ahora bien, para demostrar que  $S'$  es decidible será suficiente con demostrar que cualquier fórmula de la forma  $S'_c$  es decidible; y para demostrar que  $S'_c$  es decidible será suficiente con demostrar:

- (i) Que  $S'_c$  es l-válida si y sólo si cada  $(Ex)B_i$  es l-válida,
- (ii) Que existe un procedimiento efectivo para determinar esta validez.

CASO (i).- Que  $S'_c$  sea válida únicamente si se satisface la condición estipulada por este caso es por demás evidente. Lo único que falta ser demostrado aquí es la decidibilidad de la validez de cualquier fórmula individual  $(Ex)B_i$ . Esta demostración es similar a la del caso (i) del teorema anterior. Una fórmula  $(Ex)B_i$  es l-válida únicamente si su operando es tautológicamente válido. Esta aserción se deriva como sigue. El operando de la fórmula  $(Ex)B_i$  es un esquema abierto, y todo esquema abierto, en cuanto se refiere a su validez se comporta exactamente igual que los esquemas proposicionales. De aquí, que  $B_i$  sea válido sólo si lo es tautológicamente. Pero, si  $B_i$  es válido tautológicamente, es válido universalmente, es decir, la cuantificación universal de  $B_i$  es l-válido. Por tanto,  $(Ex)B_i$  también será válido, puesto que, si  $B_i$  es válido universalmente, lo será también existencialmente.

CASO (ii).- Si de acuerdo al caso anterior,  $S'_c$  es l-válido si y sólo si cada E-fórmula  $(Ex)B_i$  es l-válida y, cada E-fórmula  $(Ex)B_i$  es l-válida únicamente si su operando es tautológicamente válido, entonces, para saber si  $S'_2$  es l-válida será suficiente con borrar a todos los cuantificadores y variables individuales y luego determinara veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante:

$$B_1 \dots B_n$$

De este modo, se ha demostrado que toda fórmula de la forma  $(Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n$  es decidible.

Pero, un procedimiento así resultaría un poco laborioso, puesto que para determinar la validez de  $S'$  siempre habría que hallar primero su FNC y, por tanto, un procedimiento que permitiera omitir -



este paso tendría más importancia práctica que ésta. Pero aquí también, así como en el teorema anterior, es posible omitir este paso, y por ende, hacer de este procedimiento, un instrumento de reglas muy simples. Esto procede como sigue.

En primer lugar, entre las fórmulas  $S'$ ,  $S'_c$  y  $S'_p$  existen las siguientes relaciones:

(1) El conjunto de matrices de  $S'_p$  (esto es, sobreabrebiéndose una "x" detrás de cada letra predicado en este esquema) es idéntico al conjunto de matrices de  $S'_c$  (esto es, E-operandos), excepto en que las matrices de esta última exhiben E-cuantificadores al frente.

(2) El conjunto de matrices de  $S'_c$  es veritativo-funcionalmente equivalente al conjunto de matrices de  $S'$ , excepto en que, las matrices de  $S'_c$  están en FNC.

En segundo lugar, de los casos (i) y (ii) se sigue

(3) Que  $S'_c$  es 1-válida únicamente si su estructura veritativo-funcional (esto es,  $S'_p$ ) es tautológicamente válida.

Pero, (1) y (2) implican a su vez

(4) El conjunto de matrices de  $S'_c$  es veritativo-funcionalmente equivalente al conjunto de matrices de  $S'$ .

Y, finalmente, de (2), (3) y (4) se deduce:

(5)  $S'$  es 1-válida, únicamente si su estructura veritativo-funcional es tautológicamente válida (y, por tanto,  $S$ ) únicamente si el esquema  $S'_p$

$$B_1, \dots, B_n$$

que resulta de borrar en  $S'$  a todos los E-cuantificadores y variables individuales es tautológicamente válida.

Por tanto, las reglas de decisión para cualquier fórmula de la forma  $(Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n$  que se derivan de este teorema serán las siguientes:

R2. Para determinar la validez de cualquier fórmula  $S'$  de la forma-

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América



$(Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n$  basta proceder como sigue: borrar a todos los E-cuantificadores y variables individuales y, luego, determinar veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante. De este modo S será l-válida únicamente si  $S'_p$  lo es, de otro modo, S (y, por tanto,  $S'$ ) será lógicamente inválido.

### TEOREMA III.

Toda fórmula  $S'$  de la forma  $(x)A_1, \dots, (x)A_m, (Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n$  es una fórmula decidible.

De acuerdo a la página 3- por un lado en la fórmula básica  $S'$  intervienen únicamente las conectivas proposicionales "v", ".", y/o "¬" (internada esta última). Por otro lado,  $S'$  exhibe únicamente dos tipos de fórmulas: Universal y existencial. De esta manera, en  $S'$  una fórmula  $(x)A_i$  y una fórmula  $(x)A_j$ , o una fórmula  $(Ex)B_i$  y una fórmula  $(Ex)B_j$ , o una fórmula  $(x)A_i$  y una fórmula  $(Ex)B_i$ , estarán coligados o por una "v" o por una ".", donde  $i \neq j$ , e  $i \geq 1$  y  $j \geq 1$ , y m y n son enteros positivos finitos arbitrarios.

Por tanto, de aquí se sigue, que:

1.- Las formas básicas posibles de fórmulas que pueden construirse separadamente, primero a partir de U-fórmulas elementales  $(x)A_i$ , y segundo, a partir de E-fórmulas elementales  $(Ex)B_i$ , en base a las conectivas "v" y "." son las siguientes:

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| a) $(x)A_1 v (x)A_2 v \dots v (x)A_m$ | c) $(Ex)B_1 v (Ex)B_2 v \dots v (Ex)B_n$ |
| b) $(x)A_1 . (x)A_2 . \dots . (x)A_m$ | d) $(Ex)B_1 . (Ex)B_2 . \dots . (Ex)B_n$ |

2.- Las formas básicas posibles de  $S'$ , o partes de  $S'$  que pueden construirse a partir de las fórmulas anteriores a) - d) en base a las conectivas "v" y "." son las siguientes :

1.  $((x)A_1 v (x)A_2 v \dots v (x)A_m) v ((Ex)B_1 v (Ex)B_2 v \dots v (Ex)B_n)$
2.  $((x)A_1 v (x)A_2 v \dots v (x)A_m) . ((Ex)B_1 v (Ex)B_2 v \dots v (Ex)B_n)$
3.  $((x)A_1 v (x)A_2 v \dots v (x)A_m) v ((Ex)B_1 . (Ex)B_2 . \dots . (Ex)B_n)$
4.  $((x)A_1 v (x)A_2 v \dots v (x)A_m) . ((Ex)B_1 . (Ex)B_2 . \dots . (Ex)B_n)$



5.  $( (x)A_1.(x)A_2.....(x)A_m)v( (Ex)B_1v(Ex)B_2v...v(Ex)B_n)$
6.  $( (x)A_1.(x)A_2.....(x)A_m).( (Ex)B_1v(Ex)B_2v...v(Ex)B_n)$
7.  $( (x)A_1.(x)A_2.....(x)A_m)v( (Ex)B_1.(Ex)B_2.....(Ex)B_n)$
8.  $( (x)A_1.(x)A_2.....(x)A_m).( (Ex)B_1.(Ex)B_2.....(Ex)B_n)$

Antes de demostrar que  $S'$  es decidible, a fin de evitar una demostración in extenso, es preciso simplificar estas fórmulas, en número mínimo posible de fórmulas que sean lo bastante generales a fin de que puedan comprender a todas las demás. Así tenemos, por un lado, que en virtud de las equivalencias  $(x)A_1.(x)A_2.....(x)A_k \Leftrightarrow (x)(A_1.....A_k)$  y  $(Ex)B_1v(Ex)B_2v...v(Ex)B_k \Leftrightarrow (Ex)(B_1vB_2v...vB_k)$  las fórmulas 1-2 y 5-8 son respectivamente equivalentes a las siguientes fórmulas:

- 1.'  $( (x)A_1v(x)A_2v...v(x)A_m)v(Ex) (B_1vB_2...vB_n)$
- 2.'  $( (x)A_1v(x)A_2v...v(x)A_m).(Ex) (B_1vB_2v...vB_n)$
- 5.'  $(x)(A_1.A_2.....A_m)v(Ex)(B_1vB_2v...vB_n)$
- 6.'  $(x)(A_1.A_2.....A_m).(Ex) (B_1vB_2v...vB_n)$
- 7.'  $(x)(A_1.A_2.....A_m)v( (Ex)B_1.(Ex)B_2.....(Ex)B_n)$
- 8.'  $(x)(A_1.A_2.....A_m).( (Ex)B_1.(Ex)B_2.....(Ex)B_n)$

Por otro lado, dado que, para los fines de la presente demostración me interesa considerar la estructura lógica interna de los U- y E-operandos, podemos denotar en estas fórmulas a los U-operandos  $(A_1.A_2.....A_m)$  y E-operandos  $(B_1vB_2v...vB_n)$  simplemente por las letras mayúsculas A y B, respectivamente. De esta manera, todas estas fórmulas resultan ser sólo casos particulares de las fórmulas 3 y 4; reduciéndose por tanto, todos ellos únicamente a estas dos, como sigue:

- 1' A la fórmula 3 se reducen las fórmulas 1', 5' y 7', porque estas fórmulas no son más que formas particulares que la fórmula 3 adopta, cuando (1) en  $(Ex)B_i$   $i = 1$ , (2) en  $(x)A_i$  y en  $(Ex)B_i$   $i = 1$ , y (3) -



en  $(x)A_i$   $i = 1$ , respectivamente.

2° A la fórmula 4 se reducen las fórmulas 2', 6', y 8', porque estas fórmulas no son mas que formas particulares que adopta la fórmula 4, cuando, (1) en  $(Ex)B_i$   $i = 1$ , (2) en  $(x)A_i$  y en  $(Ex)B_i$   $i = 1$ , y (3) en  $(x)A_i$   $i = 1$ , respectivamente.

De este modo, dado que, las fórmulas 3 y 4 son las más generales, la demostración siguiente estará en **parte basada únicamente** en estas dos fórmulas.

Por tanto, para demostrar que  $S'$  es decidible, será suficiente con demostrar.

- I. Que cualquier fórmula de las formas 3 y 4 son decidibles, y
- II. Que cualquier otra combinación compleja posible de las fórmulas a) - d) de estas fórmulas también son decidibles.

#### PRUEBA.-

- I. A) Si  $S'$  (o una parte de  $S'$ ) es de la forma 3, es decir,

$$((x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \dots \vee (x)A_m) \vee ((Ex)B_1 \cdot (Ex)B_2 \cdot \dots \cdot (Ex)B_n)$$

$S'$  será lógicamente válida únicamente

- (i) Si cuando menos una  $(x)A_i$  o una  $(Ex)B_i$  cualquiera es 1-válida, o
- (ii) Si alguna  $\sim (x)A_i$  implica a alguna  $(Ex)B_i$ , o
- (iii) Si  $\sim ((x)A_j \vee (Ex)B_i)$  implica  $(x)A_k$ , para  $j < m$  y  $k < m$ .

CASO (i).-  $(x)A_i$  es 1-válida o  $(Ex)B_i$  es 1-válida.- En este caso, para determinar la validez de  $S'$  son suficientes solamente las reglas derivadas del subcaso (i) de los teoremas I y II, respectivamente, de acuerdo a las cuales, para saber si  $S'$  es 1-válida, basta con borrar a todos los U- y E-cuantificadores y variables individuales y luego, una vez adscrito los subíndice a las letras predicados de los U-esquemas (siempre que en  $(x)A_i$   $i \geq 2$ , y en  $(Ex)B_i$   $i$  puede tener cualquier valor finito), decidir veritativo-funcionalmente la validez del esquema de esta manera resultante.



CASO (ii).  $\sim (x)A_1$  implica  $(Ex)B_1$ .-- Aquí tenemos los siguientes subcasos:

32.11. Si en  $(x)A_1$   $i = 1$ , y en  $(Ex)B_1$   $i = 1$

$$S' \quad (x)A_1 \vee (Ex)B_1$$

$$S'_1 \quad \sim (x)A_1 \longrightarrow (Ex)B_1$$

32.21. Si en  $(x)A_1$   $i = 2$  y en  $(Ex)B_1$   $i = 1$

$$S' \quad (x)A_1 \vee (x)A_2 \vee (Ex)B_1$$

$$S'_1 \quad \sim ((x)A_1 \vee (x)A_2) \longrightarrow (Ex)B_1$$

.....

32.m1. Si en  $(x)A_1$   $i = m$  y en  $(Ex)B_1$   $i = 1$

$$S' \quad (x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \dots \vee (x)A_m \vee (Ex)B_1$$

$$S'_1 \quad \sim ((x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \dots \vee (x)A_m) \longrightarrow (Ex)B_1$$

Internando las negaciones de las antecedentes en los subcasos 32.21.....32.m1, tenemos respectivamente:

$$S'_2 \quad \sim (x)A_1 \cdot \sim (x)A_2 \cdot \longrightarrow \cdot (Ex)B_1$$

.....

$$S'_2 \quad \sim (x)A_1 \cdot \sim (x)A_2 \cdot \dots \cdot (x)A_m \cdot \longrightarrow \cdot (Ex)B_1$$

Ahora bien, en el primer subcaso, para determinar la validez de la fórmula  $\sim (x)A_1 \longrightarrow (Ex)B_1$  es suficiente con borrar a todos los cuantificadores y variables individuales del esquema equivalente  $(x)A_1 \vee (Ex)B_1$  y, luego, determinar veritativo-funcionalmente la validez del esquema resultante. Que esto sea suficiente para determinar



la validez de cualquier fórmula, de esta forma aquí se sigue de la siguiente interpretación de la derivación de la fórmula  $(Ex)B_1$  a partir de la fórmula  $(x)A_1$  dentro de cualquier sistema de derivación que tenga como regla la Especificación Existencial (EE). Con este objeto veamos la estructura de la derivación:

(1)	$\sim (x)A_1$	P / $(Ex)B_1$
(2)	$(Ex) \sim A_1$	(1) interc. de Q.
(3)	$\sim A_1$	(2) EE
.	.	.
.	.	..
.	.	.
(1)	$B_1$	(L - i ) T
(L + 1 )	$(Ex)B_1$	(L) GE.

Como puede observarse fácilmente, la fórmula  $(Ex) \sim A_1$  implica a la fórmula  $(Ex)B_1$  únicamente si del esquema abierto  $\sim A_1$  puede derivarse veritativo-funcionalmente el esquema abierto  $B_1$ . Pero, si este es el caso (y, ya que el único propósito que se persigue es hallar algún procedimiento efectivo), para saber si la fórmula  $(Ex) \sim A_1$  implica a la fórmula  $(Ex)B_1$  (o, equivalentemente, para saber si la fórmula  $(x)A_1 \vee (Ex)B_1$  es 1-válida), dado que implicación es validez del condicional<sup>1</sup>, es suficiente con determinar la validez del esquema  $\sim A_1 \longrightarrow B_1$  (o, equivalentemente del esquema  $A_1 \vee B_1$ ) con el auxilio de cualquier procedimiento decisorio proposicional.

En los subcasos restantes, es decir, en 32.21,..., 32.m1, en virtud de la tautología.

$$((P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_{n-1}) \longrightarrow P_n) \Longleftrightarrow (P_1 \longrightarrow P_n \cdot \vee \cdot P_2 \longrightarrow P_n \cdot \vee \cdot \dots \vee P_{n-1} \longrightarrow P_n)$$

las fórmulas  $S'_2$  se reducen respectivamente a las siguientes fórmulas equivalentes:

1.- (W.V.O. Quine. Op. Cit. p. 208.



$$S'_3 \quad (\neg (x)A_1 \rightarrow (Ex)B_1) \vee (\neg (x)A_2 \rightarrow (Ex)B_1)$$

.....

$$S'_3 \quad (\neg (x)A_1 \rightarrow (Ex)B_1) \vee (\neg (x)A_2 \rightarrow (Ex)B_1) \vee \dots \vee (\neg (x)A_m \rightarrow (Ex)B_1)$$

De esta manera, ya que estas fórmulas no son mas que disyunciones de fórmulas de la forma del primer subcaso, para saber si las fórmulas  $S'$  en estos subcasos son válidos, será suficiente con borrar a todos los U- y E-cuantificadores y variables individuales, y luego adscribir un mismo subíndice a todas las letras predicados de cada par de esquemas abiertos  $(A_i \vee B_i)$ , pero siempre usando un subíndice distinto para cada par distinto  $(A_j \vee B_j)$ , esto es, cuando  $i \neq j$ . Pero, estas fórmulas  $(S'_3)$  son a su vez equivalentes a las otras siguientes:

$$S'_4 \quad (x)A_1 \vee (x)A_2 \vee (Ex)B_{1_1} \vee (Ex)B_{1_2}$$

.....

$$S'_4 \quad (x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \dots \vee (x)A_m \vee (Ex)B_{1_1} \vee (Ex)B_{1_2} \vee \dots \vee (Ex)B_{1_m}$$

que resulta de las fórmulas  $S'_3$  de definir a la conectiva " $\rightarrow$ " y luego conmutar a los miembros de la disyunción. De este último resultado se sigue, que para determinar la validez de cualquier fórmula  $S'$  de los subcasos 32.21, ..., 32.m1, es decir, cuando en  $(x)A_i$   $i \geq 2$ , suficiente con:

1. Sustituir a la E-fórmula  $(Ex)B_1$  por una disyunción de m E-fórmulas idénticas a la E-fórmula  $(Ex)B_1$  sustituida, esto es, por la disyunción  $(Ex)B_{1_1} \vee (Ex)B_{1_2} \vee \dots \vee (Ex)B_{1_m}$ .

2. Borrar a todos los U- y E-cuantificadores y variables individuales y, luego, adscribir un mismo subíndice a todas las letras predicados de cada par de esquemas abiertos  $(A_i \vee B_i)$ , pero siempre usando un subíndice distinto para cada par distinto  $(A_j \vee B_j)$ . Y, finalmente



3. Decidir veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante.

En la práctica, las dos primeras reglas pueden integrarse en una sola donde, una vez borrados a todos los U- y E-cuantificadores y variables individuales, pueden sustituirse al E-esquema  $B_1$  por una disyunción de  $m$  miembros y, luego, adscribir subíndices como en 2 y finalmente, aplicar la regla 3 al esquema resultante.

32.12 Si en  $(x)A_i$   $i = 1$  y en  $(Ex)B_i$   $i = 2$  :

$$S' \quad (x)A_1 \cdot v. (Ex)B_1 \cdot (Ex)B_2$$

$$S'_1 \quad \sim (x)A_1 \rightarrow (Ex)B_1 \cdot (Ex)B_2$$

.....

32.1n Si en  $(x)A_i$   $i = 1$  y en  $(Ex)B_i$   $i = n$ :

$$S' \quad (x)A_1 \cdot v. (Ex)B_1 \cdot (Ex)B_2 \cdot \dots \cdot (Ex)B_n$$

$$S'_1 \quad \sim (x)A_1 \rightarrow (Ex)B_1 \cdot (Ex)B_2 \cdot \dots \cdot (Ex)B_n$$

Las fórmulas  $S'_1$  en estos subcaso, en virtud de la siguiente equivalencia.

$$P \rightarrow (Q_1 \cdot Q_2 \cdot \dots \cdot Q_n) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q_1) \cdot (P \rightarrow Q_2) \cdot \dots \cdot (P \rightarrow Q_n) \quad (E4)$$

se transforman respectivamente a las siguientes fórmulas equivalentes

$$S'_2 \quad (\sim (x)A_1 \rightarrow (Ex)B_1) \cdot (\sim (x)A_1 \rightarrow (Ex)B_2)$$

.....

$$S'_2 \quad (\sim (x)A_1 \rightarrow (Ex)B_1) \cdot (\sim (x)A_1 \rightarrow (Ex)B_2) \cdot \dots \cdot (\sim (x)A_1 \rightarrow (Ex)B_n)$$

Y estas fórmulas no son mas que conjunciones de condicionales elemental



les de la forma  $S'_1$  del subcaso 32.11, por tanto, para saber si son válidas será suficiente con aplicar el mismo procedimiento pertinente a los subcasos 32.21,...,32.m1, con la diferencia que en estos últimos no se adscribirá subíndice alguno a las letras predicados de ningún U-esquema, ya que en estas fórmulas todas las U-fórmulas son idénticas (esto es, una vez definido " $\rightarrow$ "). Pero, si este es el caso, es decir, si no es necesario adscribir subíndices a las letras predicados de las U-fórmulas en estas fórmulas, para saber si las fórmulas  $S'$  de estos subcasos son válidas será suficiente con determinar la validez de aquellas fórmulas directamente, sin transformación previa alguna, aplicando cualquier procedimiento decisorio proposicional a los esquemas resultantes de borrar a todos los U- y E-cuantificadores y variables individuales.

32.22. Si en  $(x)A_i$   $i = 2$  y en  $(Ex)B_i$   $i = 2$ :

$$S' \quad (x)A_1 \vee (x)A_2 \vee (Ex)B_1 \vee (Ex)B_2$$

$$S'_1 \quad \sim((x)A_1 \vee (x)A_2) \rightarrow (Ex)B_1 \vee (Ex)B_2$$

32.mn. Si en  $(x)A_i$   $i = m$  y en  $(Ex)B_i$   $i = n$ :

$$S' \quad (x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \dots \vee (x)A_m \vee (Ex)B_1 \vee (Ex)B_2 \vee \dots \vee (Ex)B_n$$

$$S'_1 \quad \sim((x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \dots \vee (x)A_m) \rightarrow (Ex)B_1 \vee (Ex)B_2 \vee \dots \vee (Ex)B_n$$

Aplicando (E4) a estas fórmulas, tenemos:

$$S'_2 \quad \sim((x)A_1 \vee (x)A_2) \rightarrow (Ex)B_1 \vee \sim((x)A_1 \vee (x)A_2) \rightarrow (Ex)B_2$$

$$S'_2 \quad \sim((x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \dots \vee (x)A_m) \rightarrow (Ex)B_1 \vee \sim((x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \dots \vee (x)A_m) \rightarrow (Ex)B_2 \vee \dots \vee \sim((x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \dots \vee (x)A_m) \rightarrow (Ex)B_n$$

Eliminando a la conectiva " $\rightarrow$ " de estas fórmulas:

$$S'_3 \quad (x)A_1 \vee (x)A_2 \vee (Ex)B_1 \vee (x)A_1 \vee (x)A_2 \vee (Ex)B_2$$



$$S'_3 \quad (x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \dots \vee (x)A_m \vee (Ex)B_1 \cdot (x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \dots \vee (x)A_m \\ \vee (Ex)B_2 \dots \dots (x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \dots \vee (x)A_m \vee (Ex)B_n$$

Y, estas fórmulas no son más conjunciones de las fórmulas  $S'$  de los subcasos 32.21, ..., 32.  $m_1$ , por tanto, para decidir la validez de estas fórmulas será suficiente con aplicar las reglas decisorias pertinentes a tales subcasos a cada miembro de estas conjunciones.

Por tanto, del análisis de la decidibilidad de todos estos casos de  $E'$  (o partes de ésta) de la forma 3, se sigue, que para decidir la validez de las fórmulas de esta forma de cualquier longitud finita, es suficiente con llegar a una disyunción de U- y E-fórmulas, o a una conjunción de disyunciones de U- y E-fórmulas. Pero estas fórmulas para la decisión a que se lleguen no son más que formas normales conjuntivas de sus correspondientes fórmulas  $S'$ , y de este modo, la equivalencia (E4) no viene a ser otra cosa que el equivalente a la equivalencia de la distribución de "v" sobre ".":  $PV(Q_1 \cdot Q_2 \dots Q_n) \Leftrightarrow (PVQ_1) \cdot (PVQ_2) \dots (PVQ_n)$ . En consecuencia, para determinar la validez de cualquier fórmula de la forma 3 será suficiente con hallar su FNC - cosa que se verá con más detenimiento más adelante - y luego aplicar las reglas de la página 48 Sin embargo, por fines de comodidad práctica, es preciso hacer las observaciones siguientes: aunque este tratamiento general (esto es, hallar FNC, adscribir subíndices etc.) es perfectamente aplicable a todos los subcasos de  $S'$  de la forma 3, no es recomendable aplicar a los subcasos 32.12, ..., 32.1n, puesto que como se ha demostrado, en estos casos, para decidir la validez de  $S'$ , es suficiente con borrar a todos los cuantificadores y variables individuales y, luego, someter a cualquier procedimiento decisorio proposicional al esquema  $S'_p$  resultante, siendo, por tanto, superfluo en estos casos la adscripción de subíndices a las letras predicados y cualquier transformación de  $S'$  o del esquema resultante de ésta. En contraste con este hecho, en cambio, la adscripción de subíndices y todas las demás transformaciones de  $S'$  en los subcasos restantes facilitan enormemente la operación de decisión. Pero, también en tales casos, es perfectamente posible decidir la validez de las fórmulas sin el recurso a tales expedientes. Esto puede ser



quejarse brevemente como sigue:

(i)  $(x)A_i$  es l-válido o  $(Ex)B_i$  es l-válido.- En este caso para saber si  $S'$  es l-válida, sea cual sea la longitud de  $S'$  siempre - que ésta sea finita, es suficiente con borrar a todos los U- y E-cuantificadores y variables individuales y, luego, comprobar-veritativo-funcionalmente si algún U-esquema  $A_i$  es l-válida, o cada E-esquema  $B_i$  es l-válida. Si se satisface alguna de estas condiciones,  $S'$  es l-válida.

(ii)  $\neg (x)A_i$  implica  $(Ex)B_i$ .- En este caso, para saber si  $S'$  es l-válida, una vez borrado los U- y E-cuantificadores y variables individuales es suficiente con constatar si el U-esquema - de alguna U-fórmula  $(x)A_i$  negada implica a cada uno de los E-esquemas  $B_i$ . Si este es el caso,  $S'$  es l-válido. Como resulta - evidente, este proceso sería en esta forma sumamente laborioso y tedioso.

(iii)  $((x)A_j \vee (Ex)B_i)$  implica  $(x)A_k$ , para  $j \leq m$ ,  $k \leq m$  e  $i \leq n$ .

Este caso se reduce simplemente al caso anterior, como se verá enseguida.

Estas observaciones demuestran que el uso de subíndices (o de cualquier otro signo que desempeña tal función) a las letras predicados, como también las transformaciones de  $S'$  (aunque esta última en menor medida), son simplemente meros artificios que - permiten decidir la validez de las fórmulas del caso, con la - mayor precisión y facilidad, y en un tiempo mínimo posible.

(iii)  $((x)A_j \vee (Ex)B_i)$  implica, para  $j \leq m$ ,  $k \leq m$ , e  $i \leq n$

Este caso, definiendo a la conectiva " $\rightarrow$ " de implicación, - en virtud de la conmutatividad y asociatividad de " $\vee$ ", se reduce simplemente al caso (ii).

B) Si  $S'$  (o una parte de  $S'$ ) es de la forma

$$(x)A_1 \vee (x)A_2 \vee \dots \vee (x)A_m \cdot (Ex)B_1 \cdot (Ex)B_2 \cdot \dots \cdot (Ex)B_n$$

entonces, es muy evidente, que cualquier fórmula de esta forma- (de cualquier longitud finita), en virtud de su estructura conjuntiva, será l-válida, únicamente si cada uno de sus miembros son l-válidos. Por tanto, para saber si  $S'$  es l-válida, será suficiente con borrar a todos los U- y E-cuantificadores y varia-



bles individuales y, luego, adscribir subíndices únicamente a las letras predicados de los U-esquemas (de acuerdo al subcaso (ii) - del teorema I), y finalmente, determinar veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante.

II Cualquier otra combinación compleja posible  $S'$  de las fórmulas de las formas a)-d) es decidible.

La demostración de esta segunda condición se deriva de los siguientes consideraciones sobre la primera:

- 1'.- A partir de las fórmulas de las formas a) - d) es posible - construir ocho formas básicas posibles de  $S'$  (a partes de  $S'_c$ ),
- 2'.- Estas ocho formas básicas posibles que  $S'$  (o partes de  $S'$  puede adoptar se reducen únicamente a las formas 3 y 4, por ser éstas últimas más generales que las demás,
- 3'. Las formas 3 y 4 son decidibles, para lo cual, es necesario y suficiente únicamente con hallar sus FNC respectivas y, luego aplicar ciertas reglas mecánicas a estas últimas.

De estas consideraciones se sigue que, para demostrar que cualquier combinación compleja posible  $S'$  de las fórmulas de las formas a) - d) es decidible, será suficiente con demostrar que para cualquier fórmula  $S'$  es posible construir otra fórmula equivalente  $S'_c$  en FNC, y toda fórmula  $S'_c$  es decidible aplicando ciertas reglas mecánicas (como las dadas en la página ). Esto es posible como sigue.

Dada cualquier fórmula  $S'$  de la forma  $(x)A_1, \dots, (x)A_m, (Ex)B_1, \dots, (x)B_n$  para hallar otra fórmula equivalente  $S'_c$  en FNC, basta con proceder como en la lógica proposicional, tomando a cada  $(x)A_i$  y a cada  $(Ex)B_i$  como sigue si se tratan de simples letras proposicionales, sustituyendo a cada fórmula de la forma  $X_1 \vee (X_2 X_3)$  por  $(x_1 \vee x_2)$ , donde cada  $x_i$  es una  $(x)A_i$  o una  $(Ex)B_i$ , o una combinación de éstas. Sea

$$\phi_1 \cdot \phi_2 \dots \phi_k$$

la FNC así obtenida, donde una  $\phi_i$ , sea por tanto:

$$a) \quad (x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m \vee (Ex)B_1 \vee \dots \vee (Ex)B_n$$



$$b) (x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m$$

$$c) (Ex)B_1 \vee \dots \vee (Ex)B_n$$

Y, en estas posibles estructuras de  $\phi_i$ , para facilitar el tratamiento podemos hacer algunas simplificaciones, como sigue. Por un lado, en virtud de la distributividad de los E-cuantificadores las fórmulas a) y c) se reducen respectivamente a las siguientes fórmulas equivalentes:

$$(x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m \vee (Ex)(B_1 \vee \dots \vee B_n)$$

$$(Ex)(B_1 \vee \dots \vee B_n)$$

Por otro lado, ya que, para los fines de la presente demostración no se requieren tomar en consideración a la estructura lógica interna de los U- y E-operandos, podemos denotarla en estas fórmulas al operando  $(B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n)$  por la letra mayúscula B. De este modo, la estructura de  $S'_c$  sería la siguiente:

$$((x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m \vee (Ex)B_1)_1 \dots ((x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m \vee (Ex)B_n)_j \cdot ((x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m)_1 \dots ((x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m)_k \cdot (Ex)B_1 \dots (Ex)B_n$$

Sea  $S'_c$  esta fórmula simplificada. En esta fórmula, los valores de un subíndice i cualquiera pueden ser las siguientes:

1. En las conjunción de U-fórmulas de cualquier miembro de las anteriores conjunciones:  $1 \leq i \leq m$

1.2. El valor de i en  $(Ex)B$  de las anteriores conjunciones es igual al valor que asume i en 1.

En las conjunciones de disyunciones de U-fórmulas solas:

$$0 \leq i \leq k$$

2.1. Por tanto, el valor de i en la disyunción de U-fórmulas de cualquier miembro de estas conjunciones también será como en 2:

$$0 \leq i \leq k.$$

3. En la conjunción de E-fórmulas:  $0 \leq i \leq n$ .

Por tanto, una fórmula  $S'$  cualquiera, será lógicamente válida únicamente si en el esquema  $s''_p$

$$(A_1 \vee \dots \vee A_m \vee B_1 \vee \dots \vee B_n)_1 \dots (A_1 \vee \dots \vee A_m \vee B_1 \vee \dots \vee B_n)_j \cdot (A_1 \vee \dots \vee A_m)_1 \dots (A_1 \vee \dots \vee A_m)_k \cdot B_1 \dots B_n$$

que resulta de borrar a todos los U- y E-cuantificadores y variables individuales y aplicar las reglas de la pág 48 a los j prime



ros miembros, y las reglas derivadas de los teoremas I y II a los  $k$  y  $n$  miembros restantes, respectivamente, en la fórmula  $S'_c$  cada uno de los miembros de esta conjunción resultan veritativo-funcionalmente válidos.

En esta forma, se ha demostrado que cualquier fórmula  $S'$  es decidible.

Este es un método aparentemente laborioso, pero en realidad no lo es, porque si bien es cierto, que tiene algunas desventajas frente a otros métodos ya existentes, es verdad también que estas desventajas quedan superadas o cuando menos compensadas por otras ventajas que posee este procedimiento. En primer lugar, porque ni el uso de la FNC ni el uso de los subíndices es obligatorio en todos los casos de  $S'$ , como puede verse inspeccionando brevemente:

(1) Cuando en  $S'$  el número de las U-fórmulas es  $\leq 2$ , no se usa ni la FNC ni los subíndices, la validez de  $S'$  se decide directamente borrando a todos los cuantificadores y variables individuales.

(2) Pero, tampoco cuando en  $S'$  el número de las U-fórmulas es  $\geq 2$  es necesario el uso de ambos expedientes, sino, tan sólo del primero, puesto que los subíndices son necesarios sólo cuando en algún miembro de FNC el número de las U-fórmulas es  $\geq 2$ .

En segundo lugar, aunque resulta algo paradójico, el uso de la FNC también resulta favorable a la sencillez del método, ya que, considerando en conjunto a todas las fórmulas de que consta  $S'$ , muchas de ellas que ya se encuentra en FNC o exhiben a "." como el operador de mayor jerarquía, una vez distribuidas en ésta última a todas las 'v' sobre '.', ya no se requiere hacer ninguna otra transformación, basta aplicar las reglas de la página 44 a cada uno de los miembros de la FNC para decidir la validez de  $S'$ .

Por tanto, las reglas que se derivan de este teorema para la decisión de la validez de cualquier fórmula de la forma  $(x)A_1 \dots \dots, (x)A_m, (Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n$  son las siguientes:

- A) Si el número de los U-cuantificadores es  $\leq 1$ , se procede en forma idéntica al R2
- B) Si el número de los U-cuantificadores es  $\geq 2$ , procédase sucesivamente como sigue:



- (1) Siempre que se considere conveniente y sea posible, para mayor simplicidad, redúzcase el número de los U-cuantificadores empleando las equivalencias  $(x)A_1 \dots (x)A_m \iff (x)(A_1 \dots A_m)$  y  $(\exists x)B_1 \vee \dots \vee (\exists x)B_n \iff (\exists x)(B_1 \vee \dots \vee B_n)$ ,
- (2) Hállese la forma normal conjuntiva, tomando a cada U- y E-formula en bloque como si fueran simples letras proposicionales,
- (3) Bórrese a todos los cuantificadores y variables individuales y, luego:
  - (3.1) En cada miembro de la FNC, que contenga la disyunción de U- y E-esquemas, si el número de los U-esquemas es  $\geq 2$ , sustitúyase a cada E-esquema  $B_i$  por la disyunción de  $m$  miembros  $B_{i_1} \vee \dots \vee B_{i_m}$  y, luego a todas las letras predicados de cada disyunción bimembre  $A_i \vee B_i$  adscribáse un mismo subíndice, pero usando un subíndice distinto para cada disyunción que difiera en el U-miembro. De otro modo, si el número de los U-esquemas es  $\leq 1$ , procédase en forma similar a A).
  - (3.2) En los demás miembros de la FNC, procédase simplemente conforme a R1 o R2, según sea el caso.
- (4) S ( $S'$ , etc.) será l-válida únicamente si el esquema  $S'_p$  resultante de estas operaciones es veritativo-funcionalmente válido.

#### TEOREMA IV.

Sea  $S'$  una fórmula de la forma  $(x)A_1, \dots, (x)A_m, Ca_1, \dots, Ca_r$  donde, de acuerdo a la pág. 33  $n$  y  $r$  son enteros positivos arbitrarios, y las únicas conectivas proposicionales que aparecen son " $\vee$ ", " $\cdot$ " y/o " $\sim$ ", internada esta última. La validez de cualquier fórmula de esta forma es decidible, como sigue.

Antes de efectuar la demostración de este teorema, es preciso hacer la siguiente advertencia. De acuerdo a las reglas decisorias que aparecen en la primera parte de esta tesis cualquier fórmula monádica básica que exhibe constantes individuales es decidible. Con este objeto, para cada una de las formas IV, V y VI de  $S'$  que exhibe constantes individuales, por tanto, podría construirse una demostración como de la forma III de  $S'$  (dado que en dicha forma  $S'$  tiene dos tipos de fórmulas), determinando un



número mínimo de fórmulas de ciertas formas básicas, las cuales, o a partir de las cuales se construiría cualquier otra forma de  $S'$  que exhibe constantes individuales. Pero, esto sería innecesario, ya que, la validez de cualquier fórmula  $S'$  de las formas IV, V y VI también se funda en los mismos principios esenciales que la validez de las anteriores formas de  $S'$ , como se verá en seguida. Por tanto, la demostración de este teorema y de las otras dos restantes será desarrollada de una manera bastante escueta, apoyándose en lo posible en los teoremas anteriores.

PRUEBA. Dada una fórmula  $S'$  cualquiera, hay otra fórmula equivalente  $S'_C$  en forma normal conjuntiva que se obtiene a partir de las fórmulas de  $S'$ , tomando a cada  $(x)A_i$  y a cada  $Ca_i$  en bloque como si fueran letras proposicionales. Sea

$$((x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r)_1 \dots ((x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r)_j$$

$$((x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m)_1 \dots ((x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m)_k \cdot (Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r)_1 \dots (Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r)_n$$

La FNC así obtenida, es decir, la fórmula  $S'_C$ .

Ahora bien, para demostrar que  $S$  es decidible, será suficiente con demostrar que cualquier fórmula de la forma  $S'_C$  es decidible, y para demostrar que  $S'_C$  es decidible será suficiente con demostrar que cada uno de sus miembros también lo son. De este modo:

- a) Planteando los casos de validez para los primeros  $j$  miembros de esta fórmula, de un modo similar a los casos de validez de las formas anteriores de  $S'$ , tenemos los siguientes subcasos:

41.11 Si  $i = 1$ , tanto en  $(x)A_1$  como en  $Ca_1$ :

$$S' \quad (x)A_1 \vee Ca_1$$

Por tanto, si esta fórmula es válida, también debe serlo

$$S'_1 \quad (x)A_1 \longrightarrow Ca_1$$

$$S'_2 \quad (Ex) \sim A_1 \longrightarrow Ca_1 \quad (\text{Internando la negación del antecedente})$$

.....

.....

.....

.....



41.mr. Si  $i = m$  e  $i = r$ , en  $(x)A_1$  y  $Ca_1$ , respectivamente:

$S'$   $(x)A_1 v \dots v (x)A_m v Ca_1 v \dots v Ca_r$   
procediendo como en 41.11:

$S'_1 \quad \sim((x)A_1 v \dots v (x)A_m) \rightarrow Ca_1 v \dots v Ca_r$

$S'_2 \quad \sim(x)A_1 \dots \sim(x)A_m \rightarrow Ca_1 v \dots v Ca_r$

En el caso 41.11, resulta patentemente claro que ninguna fórmula de la forma  $(Ex) \sim A_1 \rightarrow Ca_1$  es 1-válida en sistema alguno de la lógica de predicados, a menos que en esta fórmula el antecedente  $(Ex) \sim A_1$  sea lógicamente inconsistente (o contradictorio) o el consecuente  $Ca_1$  sea lógicamente válido; pero decir esto equivale a decir, que su equivalente  $(x)A_1 v Ca_1$  es válido si - cuando menos  $(x)A_1$  es válido o  $Ca_1$  es válido, y si este es el caso, - y en realidad esta es la única posibilidad de validez del S' de este subcaso -, pues, basta borrar al U-cuantificador y a todos los  $x$ s de  $(x)A_1$  y a todas las constantes individuales de  $Ca_1$ , y luego, adscribir un mismo subíndice a todas las letras predicados del U-esquema  $A_1$ , haciendo otro tanto igual con las letras predicados de  $C_1$ , pero usando un subíndice distinto. Aquí del hecho de borrar a la constante  $a_1$  no puede originarse ninguna ambigüedad, dado que, inmediatamente se le sustituye por un subíndice distinto de las del U-esquema  $A_1$ . Y, en general, en lo que sigue, a cada letra predicado  $C_i$  y  $C_j$  que provengan de borrar distintas constantes  $a_i$  y  $a_j$ , se les adscribirán subíndices también distintos; y en lo que respecta a las letras predicados de los U-esquemas, se procederá como siempre de acuerdo a las reglas ya establecidas, pero usando subíndices distintos de las letras predicados de las constantes individuales.

41.mr. Aplicando la equivalencia (E3) a la fórmula  $S'_2$  tenemos:

$S'_3 \quad (\sim(x)A_1 \rightarrow Ca_1 v \dots v Ca_r) v \dots v (\sim(x)A_m \rightarrow Ca_1 v \dots v Ca_r)$

y, luego, aplicando la equivalencia (E2) a cada uno de los condicionales de esta fórmula, obtenemos, finalmente:

$(\sim(x)A_1 \rightarrow Ca_1 v \dots v \sim(x)A_1 \rightarrow Ca_r) v \dots v (\sim(x)A_m \rightarrow Ca_1 v \dots v \sim(x)A_m \rightarrow Ca_r)$

es decir, una serie de disyunciones de condicionales de la forma

$S'_1$  del caso 41.11. Por tanto, esta fórmula así extendida será

1-válida únicamente si en su equivalente:



$$((x)A_1 v Ca_1 . v \dots v . (x)A_1 v Ca_r) v \dots v ((x)A_m v Ca_1 . v \dots v . (x)A_m v Ca_r)$$

que resulta de definir a la conectiva " $\rightarrow$ ", si cuando menos una  $(x)A_i$  o una  $Ca_i$  es l-válida. Pero, si las cosas son así, no tiene objeto extender a la fórmula  $S'$ , basta simplemente con determinar veritativo funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$

$$A_1 v \dots v A_m v C_1 v \dots v C_r$$

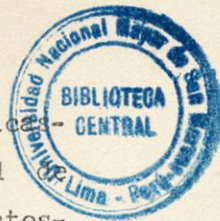
que resulta de borrar en  $S'$  a todos los cuantificadores, variables y constantes individuales y, luego, adscribir subíndices a las letras predicados de los U-esquemas, como siempre, y hacer otro tanto similar con las letras predicados  $C_i$ , pero usando subíndices distintos de los de U-esquemas, como ya quedó establecido líneas arriba. De este modo, aquí queda comprendido también otros casos de validez de  $S'$ , debido a la presencia de mas de una fórmula que exhibe constantes: la posibilidad de que una  $Ca_i$  implique  $Ca_j$ , o  $((x)A_1 v \dots v (x)A_j v Ca_1 v \dots v Ca_r)$  implique  $(x)A_1 v \dots v (x)A_k$ , etc., (donde,  $j < m$ ,  $k < m$ ).

Por tanto, este procedimiento es efectivo para cualesquiera de los  $j$  primeros miembros de  $S'_1$ , ya que todos ellos son de la misma forma.

- b) Para determinar la validez de los  $k$  miembros siguientes, como es evidente, basta apelar solamente a las reglas derivadas del teorema I.
- c) Por último, para determinar la validez de los  $n$  miembros, basta con borrar a todas las constantes individuales y adscribir un subíndices distintos a cada letra predicado que provenga de borrar una constante individual distinta, y luego, someter a cualquier procedimiento decisorio proposicional al esquema resultante. Que esto sea suficiente para determinar la validez de estos miembros de  $S'_1$  proviene del hecho de que las fórmulas  $Ca_i$  se comportan en cuanto respecta a su validez, en forma exactamente igual que las matrices de fórmulas cuantificadas, de tal modo que, también se podría tratarlas sin borrar a las constantes, pero ello se hace a fin de guardar uniformidad en el procedimiento.

De todas las pruebas precedentes, la más importante es la del inciso a), ya que, lo que interesa en esta forma de  $S'$  es





la decidibilidad de la validez de fórmulas universales básicas que exhiben constantes individuales, y no la decidibilidad de meras fórmulas universales ni de meras fórmulas con constantes individuales sin fórmulas cuantificadas, y, en todo caso, estas últimas no son más que posibles consecuencias de la transformación de  $S$  a  $S'_1$ , y son cuestiones ya resueltas. De esto se concluye, que dada una fórmula cualquiera  $S'$  de la forma  $(x)A_1, \dots, (x)A_m, Ca_1, \dots, Ca_r$  para saber si se trata de una fórmula l-válida, basta con borrar en ella a todos los cuantificadores y variables y constantes individuales, y luego, proseguir de acuerdo a las reglas establecidas en el inciso a). Sin embargo, sería más preferible dejar establecidas a estas reglas que se derivan de este teorema, en forma más explícita y ordenada, de la siguiente manera:

- R4. Para determinar la validez de cualquier fórmula  $S'$  de la forma  $(x)A_1, \dots, (x)A_m, Ca_1, \dots, Ca_r$ , es suficiente con:
- (1) Borrar a todos los cuantificadores y variables individuales y, luego adscribir subíndices a las letras predicados de los U-esquemas conforme a la regla R1.
  - (2) Borrar a todas las constantes individuales y, luego adscribir un mismo subíndice a todas las letras predicados que provengan de borrar a una misma constante individual; por tanto, a las letras predicados que provengan de borrar constantes individuales distintas, se les adscribirán también subíndices distintos. En la práctica, estas dos reglas pueden efectuarse simultáneamente.
  - (3) Someter a cualquier procedimiento decisorio proposicional al esquema  $S'_p$  resultante de (1) y (2). Por tanto,  $S$  ( $S'$ , etc.) será l-válida únicamente si  $S'_p$  lo es tautológicamente.

#### TEOREMA V

Sea  $S'$  una fórmula de la forma  $(Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n, Ca_1, \dots, Ca_r$ .

Procediendo de una manera análoga al teorema anterior, obtenemos la FNC de  $S'$ :

$$((Ex)B_1 \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r)_1 \dots ((Ex)B_n \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r)_j \cdot (Ex)B_1 \dots (Ex)B_n$$

$B_n$ .



$$(Ca_1 v \dots v Ca_r)_1 \dots (Ca_1 v \dots v Ca_r)_k$$

donde, se han reducido el número de E-cuantificadores con el objeto de simplificar la demostración.

Planteando los casos generales de validez para cada una de las tres formas de miembros de  $S'_C$  como en el teorema anterior, lo único que se requiere demostrar aquí es la decidibilidad de los  $j$  primeros miembros, puesto que, los demás son los mismos - que en del  $S'_C$  de los teoremas III y IV, y por tanto, ya constituyen una cuestión resuelta. De este modo, tomando a cualquier miembro  $((Ex)B_1 v Ca_1 v \dots v Ca_r)_i$ , tenemos:

51.11 Si  $i = 1$  en  $Ca_1$  (y el valor de  $i$  en  $(Ex)B_1$  puede ser cualquiera, ya que, hay una sola E-fórmula):

$$S' (Ex)B_1 v Ca_1$$

Por tanto, si esta fórmula es 1-válida, también ha de serlo

$$S'_1 \sim (Ex)B_1 \rightarrow Ca_1 \quad \text{Internando la negación del antecedente:}$$

$$S'_2 (x) \sim B_1 \rightarrow Ca_1$$

.....  
.....  
.....

51.1<sub>r</sub> Si  $i = r$  en  $Ca_1$ :

$$S' (Ex)B_1 v Ca_1 v \dots v Ca_r$$

Procediendo como en 51.11, obtenemos:

$$S'_1 (x) \sim B_1 \rightarrow Ca_1 v \dots v Ca_r \quad \text{Aplicando (E3)}$$

$$S'_2 (x) \sim B_{1_1} \rightarrow Ca_1 v \dots v \sim B_{1_1} \rightarrow Ca_r$$

51.11.- Para determinar la validez de la fórmula  $(Ex)B_1 v Ca_1$  es suficiente con borrar el E-cuantificador, variables y constantes individuales y, luego decidir veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante. Esta regla se deriva de una interpretación de la validez de la fórmula  $(x) B_1 \rightarrow Ca_1$  dentro de un sistema de derivación semilar a la interpretación de la validez de la fórmula  $(Ex) A_1 \rightarrow (Ex)B_1$  hecha en el subcaso 31.11. Esta consideración es pues, suficiente, puesto que, en un sistema de derivación una fórmula de la forma  $(x) B_1 \rightarrow Ca_1$  es válida únicamente si del operando  $B_1$  (donde se han sustituido a todas las  $x$ 's por la constante  $a_1$ ) puede derivarse veritativo



funcionalmente la fórmula  $Ca_1$ . Pero, entonces, por una parte, - como lo único que importa en el presente caso es determinar la validez de la fórmula  $(x) \sim B_1 \rightarrow Ca_1$  (o de su equivalente  $(Ex) B_1 \vee Ca_1$ ) de un modo efectivo sea por el medio que sea, pues, es suficiente con determinar veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $\sim B_1 \rightarrow C_1$  (o equivalentemente, de  $B_1 \vee C_1$ ), borrando a todos los  $x$ 's y  $a_1$ 's. Por otra parte, aquí, el hecho de borrar a las variables y constantes individuales no origina ninguna ambigüedad, puesto que, en esta fórmula hay un sólo tipo de letra constante y, por tanto, puede sobreentendérselas simplemente detrás de cada  $B_1$  y  $C_1$ , de la misma manera como se hizo con las  $x$ 's de la fórmula similar referida. Además así como en los subcasos 32.12, ..., 32.1n, pág. 49, debido a la presencia de una sólo fórmula universal para determinar la validez de  $S'$  se demostró que era suficiente con borrar a todos los cuantificadores y variables individuales en aquellas fórmulas de dichos subcasos, aquí también, por razones muy similares, ya que, la presencia de una sólo letra constante en la fórmula  $S'$  del presente caso comporta las mismas peculiaridades (con respecto a los subíndices) que las U-fórmulas en los referidos subcasos, siempre que estemos frente a cualquier fórmula  $S'$  cuya forma esquemática sea  $(Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n \vee C_1a, \dots, C_ra$ , donde un subíndice  $i$  cualquiera en esta fórmula:  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq i \leq r$ , para determinar su validez bastará con borrar a todos los cuantificadores,  $x$ 's y  $a$  s en ella, sin someterla a transformación previa alguna y, luego, comprobar veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante.

51.1r.- Definiendo a la conectiva " $\rightarrow$ " en la fórmula  $S'_2$  obtenemos otra fórmula equivalente  $S'_3$ :  $(Ex)B_1 \vee Ca_1 \vee \dots \vee (Ex)B_r \vee Ca_r$ , y a su vez esta última es tautológicamente equivalente a la fórmula  $S'_4$ :

$(Ex)B_1 \vee \dots \vee (Ex)B_r \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r$ . De este último resultado se sigue que dada una fórmula de la forma  $(Ex)B_1 \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r$ , donde  $1 \leq i \leq r$ , para saber si es una fórmula 1-válida es suficiente con

- (1) Sustituir a  $(Ex)B_1$  por una disyunción de  $r$  miembros, donde cada miembro de esta disyunción sea idéntica a  $(Ex)B_1$ ,
- (2) Borrar a todos los cuantificadores, variables y constantes-



a qué fórmula  $Ca_1$  implica  $\sim (Ex)B_1$  depende en gran medida de la ingeniosidad del investigador, y por tanto, este procedimiento no es mecánico, un procedimiento decisorio tiene que ser mecánico.

2. Si la fórmula en cuestión no es válida, como dice Quine (1) el procedimiento podría continuarse hasta la eternidad y nunca se podría saber a qué  $Ca_1$  implica la fórmula  $\sim (Ex)B_1$ .

b) Dado que  $r$  es un entero positivo finito, siempre se podría saber en un número finito de pasos a qué  $Ca_i$  implica la fórmula  $(Ex)B_1$ , para la cual, una vez internada la negación y borrado el cuantificador, bastaría proceder como sigue:

1° Sustituir a todos los  $x$ 's por  $a_1$  y, luego, ver si  $B_1$  implica  $Ca_1$ ; tanto, que la fórmula del caso es válida; y si esto sucediera, aquí se daría por terminado la operación, en caso contrario, se continúa con el siguiente paso.

2° Sustituir a todos los  $x$ 's por  $a_2$  en  $B_1$ , y proceder del mismo modo que en el paso anterior en todo lo demás. Si aquí,  $B_1$  implica  $Ca_2$  se da por terminada la operación, de otro modo, se sigue adelante,

.

.

.

$r$ ° Sustituir a todos los  $x$ 's por  $a_i$ , y si aquí  $Ca_r$  es implicada por  $B_1$ , la fórmula en cuestión será válida, de no ser así, se llegará a la conclusión de que se trataba simplemente de una fórmula no-válida.

Caso (ii).- También aquí hay dos posibilidades, pero a diferencia de las dos anteriores, en este caso ambas son efectivas:

a) Podría determinarse a qué fórmula  $Ca_j$  implica una fórmula  $Ca_i$ , constatando sucesivamente a las siguientes posibilidades:

1°  $\sim Ca_1$  implica  $Ca_2, \circ, \dots, \circ \sim Ca_1$  implica  $Ca_r, \circ$

2°  $\sim Ca_2$  implica  $Ca_3, \circ, \dots, \circ \sim Ca_2$  implica  $Ca_r, \circ$

.

.

.

$r-1$   $Ca_{r-1}$  implica  $Ca_r$

dando por concluida la operación en cualquier paso  $r-i (i \geq 1)$ --

----- Universidad Nacional Mayor de San Marcos

(1) Quine. Op. Cit. P. 260



individuales en la fórmula resultante de (1), y luego

- a) Adscribir un mismo subíndice a todas las letras predicados de cada E-esquema  $B_i$ , pero, utilizando un subíndice distinto en cada E-esquema.
- b) Empleando los mismos subíndices anteriores, adscribir un subíndice distinto a cada letra predicado que provenga de borrar una constante individual distinta.

En la práctica estas dos reglas se funden en una sola: borrar el E-cuantificador y a todos los  $x$ 's y  $a_i$ 's, y sustituir al E-esquema  $B_1$  por una disyunción de  $r$  miembros, esto es, por  $B_{1_1} \vee \dots \vee B_{1_r}$ , donde cada  $B_{1_i}$  sea idéntico a  $B_1$  y, luego, siguen los encisos a) y b) de (2) tal como se han establecido.

Estas reglas se fundan en el siguiente análisis de la validez de la fórmula  $((\text{Ex})B_1 \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r)_i$ .

Por un lado, dada una fórmula cualquiera de la forma  $(\text{Ex})B_1 \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r$ , puede ocurrir

- (i) Que  $\sim (\text{Ex})B_1$  implique a una  $Ca_i$ .
- (ii) Que una  $\sim Ca_i$  implique a una  $Ca_j$ .

En el primer caso, considerando a la fórmula  $(\text{Ex})B_1 \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r$ , tal y como es, y suponiendo que esta fórmula es l-válida, se sabe que  $\sim (\text{Ex})B_1$  puede implicar a alguna fórmula  $Ca_i$ , pero si  $1 \leq i \leq r$ , no se sabría efectivamente a cuál de las  $r$  fórmulas podría implicar  $(\text{Ex})B_1$ .

Algo similar sucede con el segundo caso, donde, dando por supuesto la validez de la fórmula en cuestión, se sabe que una fórmula

$Ca_i$  puede implicar a alguna fórmula  $Ca_j$ , pero si aquí igualmente  $1 \leq i \leq r$ , no se sabría efectivamente qué fórmula específica  $Ca_i$  podría implicar a qué otra fórmula  $Ca_j$ .

Frente a este problema habrían las siguientes posibles soluciones. Primero, sobre el caso (i) hay una alternativa:

- a) Podría determinarse a qué fórmula  $Ca_i$  implica la fórmula  $\sim (\text{Ex})B_1$ , llevando el problema dentro de un sistema de derivación. Pero aquí hay dos obstáculos insalvables:

1. Si la fórmula en cuestión es válida, el éxito de determinar



ahí donde uno se encuentre con una implicación, en caso contrario seguir hasta el final, donde si  $Ca_{r-1}$  implica  $Ca_r$ , la fórmula en cuestión será lógicamente válida, de otro modo, se habría tratado simplemente de una fórmula no válida.

b) Dado que las fórmulas  $Ca_i$  en cuanto se refiere a la validez se comportan de un modo exactamente igual que las letras proposicionales y el propósito principal aquí es determinar la validez, materia del presente análisis, entonces será suficiente con someter a  $Ca_1 v \dots v Ca_r$  a cualquier procedimiento proposicional efectivo.

De este modo, dada una fórmula cualquiera, cuya forma sea - como la del presente análisis, podría determinarse su validez - siempre y de un modo mecánico, simplemente apelando a la segunda posibilidad de solución del caso (i) y a cualquiera de las dos - posibilidades de solución del caso (ii). Evidentemente, habrían también otros casos más: (iii) que  $((Ex)B_1 v Ca_1 v \dots v Ca_j)$  implica  $Ca_1 v \dots v Ca_k$  (donde,  $j \leq r$ ,  $k \leq r$ ), etc., pero todos ellos - se reducen solamente a los dos casos anteriores en virtud de la conmutatividad de "v". Ahora bien, un procedimiento como se acaba de presentar en este análisis, resultaría enormemente laborioso y tedioso, y no podría servir para fines de un uso práctico. Pero aún así, aquí lo importante, es que, lo que se acaba de presentar es de hecho un procedimiento decisorio; lo ideal sería - sintetizarla en una forma más simple y práctica, donde estén todas las posibilidades de implicación del inciso b) del análisis del caso (i) y del inciso a) del análisis del segundo caso. Y, precisamente, las reglas decisorias presentadas al principio del caso 51.1r constituyen esta síntesis ideal, y por tanto, consecuencia de este análisis.

Por otra parte, en la determinación de la validez de la fórmula  $S'$  no se puede borrar simplemente a las constantes individuales, sino, tiene que sustituirse las inmediatamente por subíndices distintos ~~acaaa~~ constancia distinta, porque podría darse el caso - en que en alguna fórmula no válida se diera una disyunción de la forma  $Ca_i v \sim Ca_j$ , es decir, una disyunción no válida, puesto que  $i \neq j$ , de donde, si simplemente se borrarán las constantes individuales resultaría falazmente tautológico el esquema  $Cv \sim C$ .

Universidad Nacional Mayor de San Marcos  
Universidad del Perú. Decana de América



De aquí, que sea preciso adscribir distintos subíndices y cerrar paso a este resultado no deseable.

Por tanto, las reglas decisorias para la forma V de  $S'$  que se derivan de este teorema es como sigue.

R5. Para determinar la validez de cualquier fórmula  $S'$  de la forma  $(Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n, Ca_1, \dots, Ca_r$  basta con proceder como sigue:

A) Si en  $S'$  el número de tipos de letras constantes individuales es  $\leq 1$ , y en  $(Ex)B_i$   $1 \leq i \leq n$ : bórrese a todos los cuantificadores, variables y constantes individuales, luego de término veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante.

B) Si en  $S'$  el número de tipos de letras constantes individuales es  $\geq 2$  y el número de las E-fórmulas es como en A), siempre que se considere adecuado o necesario, ejecútase los pasos siguientes en orden consecutivo:

(1) Redúzcase el número de E-cuantificadores empleando la equivalencia  $(Ex)B_1 \vee \dots \vee (Ex)B_n \equiv (Ex)(B_1 \vee \dots \vee B_n)$ ,

(2) Hállese la FNC, es decir, una fórmula equivalente  $S'_c$ ,

(3) Reitérese el paso (1) nuevamente,

(4) Determinése la validez de cada uno de los tres tipos de miembros de  $S'_c$  como sigue:

a) Si es de la forma  $(Ex)B_1 \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r$ :

1. Borrar el E-cuantificador y a todos los  $x$ 's y  $a$ 's y sustituir al E-esquema  $B_1$  por una disyunción de  $r$  miembros, es decir, por  $B_{1_1} \vee \dots \vee B_{1_r}$ , donde cada  $B_{1_i}$  sea idéntico a  $B_1$ , y ejecutar simultáneamente: 1.º adscribir un mismo subíndice a todas las letras predicados de cada E-esquema  $B_{1_i}$ , pero utilizando un subíndice distinto en cada caso; 1.ºº Empleando los mismos subíndices, adscribir un subíndice distinto a cada letra predicado que provenga de borrar cada constante distinta.

2. Determinése veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante.

b) Si el miembro de  $S'_c$  es de la forma  $(Ex)B_1 \dots (Ex)B_n$ , aplíquese simplemente la regla R2.



c) Si el miembro de  $S'_C$  es de la forma  $Ca_1 v \dots v Ca_r$ , -  
determinése su validez mediante cualquier procedimiento proposi-  
cional efectivo.

(5)  $S$  ( $S'$ , etc.) será 1-válida únicamente si cada miembro  
de  $S'_C$  resulta 1-válida.

En la regla B), así como en las demás reglas ya estableci-  
das, es necesario observar que, por un lado, los pasos (1) y  
(3) son simplemente auxiliares, pudiendo prescindirse, por tan-  
to, si así se desea, aplicando la regla (4)-a) a cada E-esquema  
por otro lado, la presencia de los casos b) y c) en  $S'_C$  es muy -  
poco frecuente.

#### TEOREMA VI.

Sea  $S'$  de la forma  $(x)A_1, \dots, (x)A_m, (Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n, Ca_1, \dots, Ca_r$  donde, en cada tipo de fórmulas un subíndice  $i$  cual-  
quiera es  $i \geq 1$ , y  $m, n$  y  $r$  son enteros positivos finitos cual-  
quiera. Procediendo de un modo similar a los teoremas anterio-  
res, obtenemos su forma normal conjuntiva, esto es, una fórmula  
equivalente  $S'_C$ :

$$((x)A_1 v \dots v (x)A_m v Ca_1 v \dots v Ca_r)_1 \dots ((x)A_1 v \dots v (x)A_m v Ca_1 v \dots v Ca_r)_j \cdot$$

$$((Ex)B_1 v Ca_1 v \dots v Ca_r)_1 \dots ((Ex)B_n v Ca_1 v \dots v Ca_r)_k \cdot ((x)A_1 v \dots v$$

$$(x)A_m v$$

$$(Ex)B_1 v Ca_1 v \dots v Ca_r)_1 \dots ((x)A_1 v \dots v (x)A_m v (Ex)B_n v Ca_1 v \dots v Ca_r)_n$$

donde a su vez, se han reducido el número de los E-cuantificado  
sólo para los fines de la sencillez de esta demostración. Cla-  
ro está, que en esta FNC también deberían aparecer tres tipos -  
de miembros mas: disyunciones formadas únicamente por U-fórmu-  
las, disyunciones formadas únicamente por E-fórmulas y disyunc-  
ciones formadas únicamente por fórmulas que están constituidas-  
sólo por letras predicados y constantes individuales. Sin en-  
bargo, no se han tomado en cuenta a estas disyunciones en esta-  
fórmula, por una parte, porque en los teoremas anteriores ya se  
han demostrado que estas disyunciones son decidibles, y por otra  
otra parte, para evitar que esta FNC apareciera más compleja.



Para demostrar que la validez de  $S'_C$  es decidible (y, por tanto,  $S'_8$ , etc.), será suficiente con demostrar que cualesquiera de sus miembros son también decidibles. Pero, ya que los dos primeros tipos de miembros de esta fórmula ya están demostrado en los teoremas anteriores, bastará con demostrar que el último tipo de estos miembros son también decidibles.

De este modo, planteando los casos generales de validez de cualquier miembro  $((x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m \vee (Ex)B_1 \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r)_i$  y empleando las equivalencias universalmente válidas (E1) y (E2), tenemos:

63.111 Si tanto en  $(x)A_i$  como en  $Ca_i$   $i = 1$ :

$$S' \quad (x)A_1 \vee (Ex)B_1 \vee Ca_1$$

$$S'_1 \quad \sim (x)A_1 \longrightarrow \cdot (Ex)B_1 \cdot \vee \cdot \sim (Ex)B_1 \longrightarrow Ca_1 \quad (E1)$$

$$S'_2 \quad \sim (x)A_1 \longrightarrow (Ex)B_1 \cdot \vee \cdot \sim (x)A_1 \longrightarrow Ca_1 : v : \quad (E2)$$

$$\sim (Ex)B_1 \longrightarrow Ca_1$$

63.mlr Si en  $(x)A_i$   $i = m$  y en  $Ca_i$   $i = r$ :

$$S' \quad (x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m \vee (Ex)B_1 \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r$$

$$S'_1 \quad (x)A_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow ((x)A_2 \vee (Ex)B_1 \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r) \quad (E1)$$

$$\cdot \vee \cdot (x)A_2$$

$$((Ex)B_1 \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r) \cdot \vee \cdot \sim (Ex)B_1 \longrightarrow (Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r) \cdot \vee \cdot \sim Ca_1$$

$$\longrightarrow \dots \longrightarrow Ca_r$$

$$S'_2 \quad \sim (x)A_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow (x)A_2 \cdot \vee \cdot \sim (x)A_1 \longrightarrow (Ex)B_1 \cdot \vee \cdot (x)A_1 \longrightarrow Ca_1 \cdot \vee \cdot \dots \cdot \sim (x)A_1 \longrightarrow Ca_r : v : \sim (x)A_2 \longrightarrow$$

$$(Ex)B_1 \cdot \vee \cdot (x)A_2 \longrightarrow Ca_1 \vee \dots \vee \sim (x)A_2 \longrightarrow Ca_r : v : \sim (Ex)B_1$$

$$\longrightarrow Ca_1 \vee \dots \vee \sim (Ex)B_1 \longrightarrow Ca_r : v : \sim Ca_1 \longrightarrow \dots \sim Ca_r \quad (E2)$$

63.111.- Para que  $S'$  sea válida es suficiente con

(1) Sustituir a  $(Ex)B_1$  por una disyunción de dos miembros, es decir, por  $(Ex)B_{1_1} \vee (Ex)B_{1_2}$ , y luego en la fórmula resultante.

(2) Borrar a todos los cuantificadores, x's y a's. y adscribir un mismo subíndice a todas las letras predicados de la disyunción de los dos primeros esquemas, y un subíndice distinto al de los dos últimos.



tinto al de los dos últimos

- (3) Determinar veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante de (1) y (2)

Estas reglas para determinar la validez de  $S'$  se derivan -- del siguiente análisis de la fórmula  $S'_2$ .  $S'_2$  es una disyunción de tres condicionales, donde, por una parte, para determinar la validez del primer y el tercer condicional, de acuerdo a los subcasos 32.11, y 53.11 basta con borrar a los cuantificadores,  $x$ 's y  $a$ 's en  $S'$  y luego determinar veritativo-funcionalmente la validez del esquema resultante. Por otra parte, para determinar la validez del segundo condicional de acuerdo al subcaso 43.11 no basta simplemente con borrar al cuantificador  $x$  y  $a$ , sino, es necesario adscribir subíndices distintos a las letras-predicados del esquema  $A_1$  y del esquema  $C_1$ . Pero, entonces habría que adscribir subíndices en  $S'$  a las letras predicados del primer y el tercer condicional. De esta manera, dado que hay una sola E-fórmula, una misma letra predicado resultaría con dos subíndices distintos, y esto no tiene sentido en el presente contexto. De aquí se sigue, que para determinar la validez de  $S'$ , es necesario sustituir a las E-fórmulas por una disyunción de dos miembros.

63.mlr.- En este caso general,  $S'_2$  es una disyunción de tipos -- de condicionales elementales tratados en los subcasos 31.ml y 51.lr. Para determinar la validez de  $S'$  en tales subcasos fue necesario sustituir a  $(Ex)B_1$  por una disyunción de  $m$  miembros -- en el primero, y por una disyunción de  $r$  miembros en el segundo subcaso. Por tanto, como la fórmula  $S'_2$  no es nada mas que una disyunción de tales condicionales, para determinar la validez de  $S'$  en este caso será necesario sustituir a la E-fórmula por una disyunción de  $m+r$  miembros, y luego, aplicar otras reglas -- similares a las prescritas para el caso 61.111, que en seguida se establecen ya en forma general.

R6. Para determinar la validez de cualquier fórmula  $S'$  de la forma  $(x)A_1, \dots, (x)A_m, (Ex)B_1, \dots, (Ex)B_n, Ca_1, \dots, Ca_r$  es suficiente con:

- (1) Siempre que se considere necesario y sea posible, re -- dúzcase el número de los cuantificadores, empleando las equivalencias de dichas constantes.



- (2) Hallar la FNC, es decir, una fórmula equivalente  $S'_c$ ,
- (3) Reitérese el paso (1),
- (4) Determínese la validez de cada uno de los tipos de miembros de  $S'_c$  como sigue:
  - a) Si el miembro de  $S'_c$  es de forma  $((x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m \vee (Ex)B_1 \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r)$ , donde el número de los U-cuantificadores y fórmulas que exhiben constantes individuales puede ser  $1 \leq i \leq m$  y  $1 \leq i \leq r$ , respectivamente:
    - 1° Éscrrese a todos los cuantificadores,  $x$ 's y  $a_i$ 's y sustitúyase al E-operando B por una disyunción de  $m+r$  miembros, es decir, por  $B_{i_1} \vee \dots \vee B_{i_{m+r}}$ , donde cada miembro sea idéntico a  $B_i$ , y luego ejecútense simultáneamente:
      - 1° 'adscríbase subíndices a las letras predicados de los U-esquemas empleando  $m$  subíndices distintos, de acuerdo a la regla R1;
      - 1° 'adscríbase subíndices a las letras predicados de los E-esquemas como si se trataran de U-esquemas empleando  $m+r$  subíndices distintos;
      - 1° 'adscríbase subíndices a las letras predicados  $C_i$  usando un subíndice distinto para cada letra que provenga de borrar constantes distintas.
    - 2° Determínese veritativo-funcionalmente la validez del esquema  $S'_p$  resultante.
  - b) Si el miembro de  $S'_c$  es de la forma  $(Ex)B_1 \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r$  determínese su validez aplicando la regla R4.
- (5)  $S'$  será 1-válido únicamente si cada uno de sus miembros resultan válidos.

Finalmente, antes de concluir con esta segunda parte de la presente tesis, es preciso justificar que, la presencia de letras proposicionales dentro de cualesquiera de las seis formas de  $S'$  presentadas al principio de esta segunda parte, no afecta la decidibilidad de esta fórmula de acuerdo con las reglas decisorias del método propuesto en la presente tesis. Esto es así, por una sencilla razón. En cualesquiera de las seis formas de  $S'$  de acuerdo a los teoremas correspondientes, una fórmula  $S'$  cual



cualquiera es 1-válida únicamente en dos casos fundamentales:

- 1° - cuando una fórmula  $\phi_i$  es 1-válida en virtud de su propia estructura veritativo-funcional interna, o
- 2° - Cuando una fórmula  $\phi_i$  cualquiera implica a otra fórmula  $\phi_j$  cualquiera.

Evidentemente, aquí, en el primer caso,  $\phi_i$  o es una  $(x)A_i$ , o una  $(Ex)B_i$ , o una  $Ca_i$ ; en el segundo caso,  $\phi$  con cualquiera de los subíndices, o es cualesquiera de las formas anteriores, o alguna combinación finita de las mismas. Pero, en definitiva, una fórmula  $\phi_i$  o una fórmula  $\phi_i \rightarrow \phi_j$  en estos casos, tras despejar el esquema  $S'_p$  de acuerdo a las reglas pertinentes, es 1-válida si es posible llegar a cualesquiera de los siguientes resultados:  $F_i \vee \sim F_i$  o  $C_i \vee \sim C_i$  (donde  $i \geq 0$ ), o lo que es lo mismo (con respecto a la validez) a:  $F_i \rightarrow F_i$  o  $C_i \rightarrow C_i$ .

De aquí se sigue, que si alguna fórmula compuesta por letras proposicionales es 1-válida dentro de una fórmula  $S'$ , lo será únicamente en forma independiente de las fórmulas predicativas, ya que por identidad una letra cualesquiera (predicativa o proposicional) implica solamente a otra idéntica a si misma.



### CONCLUSION

Esencialmente, la conclusión más importante que se desprende de la exposición del procedimiento decisorio propuesto en la presente tesis en las páginas anteriores es la siguiente:

La validez o la no-validez lógica de toda fórmula predicativa depende únicamente, de su estructura veritativo-funcional. Pero -

no evidentemente, de su estructura veritativo-funcional inmediata y explícita, , con la cual aparece normalmente toda fórmula,

como resultado de despejar la estructura lógica de una expresión del lenguaje corriente, (porque, si tal fuera el caso, no tendría objeto la construcción de ningún procedimiento decisorio para tales fórmulas, ya que, bastaría solamente los procedimientos puramente proposicionales), sino, de una segunda estructura, implícita en la primera, determinada a partir de aquella en base a las propiedades de implicación existente entre las fórmulas predicativas. Esto se puede ver con mayor claridad examinando brevemente la siguiente descripción general de la estructura de la fundamentación de la decidibilidad de cualquier fórmula predicativa monádica de acuerdo a los teoremas de la sección precedente.

Sea  $S$  una fórmula predicativa de cualesquiera de las seis formas determinadas en la página 33 de la segunda parte de la presente tesis. Para determinar su validez, siempre que sea necesario, es suficiente con efectuar sucesivamente las siguientes reglas:

(1) Eliminar a todas las conectivas " $\rightarrow$ ", " $\leftrightarrow$ ", etc., sustituyéndolas por sus equivalentes correspondientes, hasta reducir  $S$  a otra fórmula equivalente  $S'$ , tal que ésta última exhiba únicamente las conectivas " $\vee$ ", " $\cdot$ " y/o " $\sim$ ", internada ésta última

(2) Hallar la forma normal conjuntiva de  $S'$ , tomando a cada fórmula predicativa en bloque, como si tratara de simples letras proposicionales. Sea  $S'_c$  esta FNC.

(3) Decidir la validez de cada uno de los miembros de  $S'_c$  de acuerdo a sus reglas pertinentes.

(4)  $S$  será l-válida únicamente si el esquema  $S'_p$  resultante de  $S'_c$  es veritativo-funcionalmente válido.



Ahora bien, la estructura veritativo-funcional de  $S$  en los pasos (1) y (2) todavía no ha sufrido ninguna transformación esencial, puesto que la estructura de las fórmulas  $S'$  y  $S'_c$  que resultan respectivamente de estos pasos, no son más que transformaciones directas de la estructura explícita de la fórmula original. La transformación esencial, suficiente y necesaria que sufre la estructura veritativo-funcional de  $S$  a través de su equivalente  $S'_c$  es en el paso (3). En este paso,  $S'_c$  es una fórmula de cualesquiera de las formas siguientes, o es una conjunción finita de algunas de ellas o de todas:

- (i)  $(x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m$
- (ii)  $(Ex)B_1 \vee \dots \vee (Ex)B_n$
- (iii)  $(x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m \vee (Ex)B_1 \vee \dots \vee (Ex)B_n$
- (iv)  $(x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r$
- (v)  $(Ex)B_1 \vee \dots \vee (Ex)B_n \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r$
- (vi)  $(x)A_1 \vee \dots \vee (x)A_m \vee (Ex)B_1 \vee \dots \vee (Ex)B_n \vee Ca_1 \vee \dots \vee Ca_r$

Este paso consiste, por un lado, en la transformación de cada uno de los miembros de  $S'_c$  en otras fórmulas equivalentes en virtud de las propiedades de implicación de las fórmulas predicativas (o, equivalentemente, en virtud de las propiedades de validez de la disyunción de las fórmulas predicativas) y las equivalencias proposicionales universalmente válidas (E1) y (E2); y, por otro lado, en la adscripción de subíndices a las letras predicados (siempre que ello sea necesario) después de borrar en  $S'_c$  así modificado, a todos los símbolos que no sean letras predicados, conectivas proposicionales y/o signos de agrupación.

Lo esencial del algoritmo propuesto, radica en la primera parte de este paso, ya que, la segunda parte, como ya se dijo a propósito de la forma III de  $S'$  (Pág. 47), es nada más que un expediente que permite simplificar la ejecución del procedimiento. Todo lo demás, pues, es cuestión de detalle; aunque, es preciso aclarar algo respecto al teorema I, que aparentemente queda fuera del esquema que se acaba de examinar, debido a que allí se emplea la FND y la FNC. En dicho teorema, la FND no tiene finalidad decisoria, sino, simplemente la de permitir simplificar la fórmula -



S'. Pero lo interesante, es que, tras simplificar a dicha fórmula, se obtiene una fórmula de la misma forma que la fórmula (i); es decir, en cuanto respecta a la forma I de S' es indiferente - que se use FNC o FND para fundamentar su decidibilidad, puesto - que empleando FNC se hubiera obtenido una conjunción finita de - fórmulas de la forma (i), y para demostrar su decidibilidad, hu biera sido suficiente con demostrar la decidibilidad de cuales- - quiera de sus miembros, ya que todos son de la misma forma; y precisamente, lo que se hizo en el teorema I, fue demostrar la decidibilidad de una fórmula cualquiera de la forma (i).

Finalmente, como una segunda conclusión, es menester decir- -además, como ya se ha dicho en otra parte en forma detallada - (Pág. 50), consideración que es válida para todo el resto de las reglas- que, el **procedimiento** decisorio aquí presentado, desde- el punto de vista de su uso práctico, es un instrumento de fácil manejo, claro está, con ciertas ventajas y desventajas frente a otros métodos ya existentes para la decisión de la validez de - fórmulas cuantificacionales monádicas de la Lógica de Primer Orden.



BIBLIOGRAFIA

- ACKERMAN, WILHELM. Solvable Cases of the Decision Problem North Holland, Amsterdam, 1954.
- COPI, IRVING. Symbolic Logic. The Macmillan Company, New York, 1970.
- FERRO, J. B. Procedimientos Decisorios para las Fórmulas Cuantificacionales Monádicas de la Lógica de Predicados. Tesis presentado para optar el grado de doctor en Letras en la UNMS. Biblioteca de Letras, Ciudad Universitaria, UNMSM.
- HILBERT DAVID Y ACKERMAN WILHELM. Lógica Teórica, Tecnos, - Madrid; 1962.
- HUNTER GEOFFREY. Metalogic, An Introduction to Metatheory of Standard First-Order-Logic. The Macmillan Company, New York, 1952.
- KLEENE, STEPHEN COLE. Introduction to Metamathematics. North Holland, Amsterdam, Groningen, New York, 1952.
- LIGHTSTONE, A. H. The Axiomatic Method. Prentice-Hall. Inc, New Jersey, 1964.
- MENDELSON ELLIOTT. Introduction to Mathematical Logic. Van Nostrand Reinhold, New York, 1964.
- MOSTERIN, JESUS. Lógica de Primer Orden. Ariel, Barcelona, 1970.
- MOSTOWSKI. A. Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic. North-Holland, Amsterdam, 1952.
- PIAGET, JEAN Y BETH. E. W. Relaciones entre la Lógica Formal y el Pensamiento Real. Ed. Ciencia Nueva Madrid, 1963.
- QUINE, WILLARD VAN ORMAN. Los Métodos de la Lógica. Ariel, Barcelona, 1969 (Reimpresión).



SUPPES, PATRICK.

Introducción a la Lógica Simbólica.  
CECSA, México, 1966.

STAHL, GEROLD.

Elementos de la Metalógica y la Metama  
temática. Editorial Universitaria S.  
A. Snatiago de Chile, 1964.

TARSKI, A. MOSTOWSKI, A. Y. ROBINSON, R. Undecidable Teories  
North-Holland, Amsterdam, 1953.





## I N D I C E

I	Introducción .....	1
---	--------------------	---

### PRIMERA PARTE

#### REGLAS DECISORIAS PARA LAS FORMULAS CUANTIFICACIONALES MONADICAS D DE LA LOGICA DE PRIMER ORDEN.

1.-	Reglas Decisorias para las Fórmulas Básicas .....	2
	Algunos ejemplos de la aplicación de estas reglas .....	5
2.-	Reglas Decisorias para las Fórmulas no-básicas .....	14
	Fórmulas Complejas .....	14
	Algunos ejemplos de la aplicación de estas reglas .....	15
	Formas Normales Prenexas .....	19
	Algunos ejemplos de la aplicación de estas reglas .....	20
3.-	Reglas Decisorias para Fórmulas que contienen constantes individuales .....	24
	Algunos ejemplos de la aplicación de estas reglas .....	27
	Una breve referencia a la procedencia de algunos ejemplos de esta primera parte .....	31

### SEGUNDA PARTE

	FUNDAMENTOS DEL PROCEDIMIENTO DECISORIO PROPUESTO .....	33
	Teorema I .....	34
	Teorema II .....	40
	Teorema III .....	43
	Teorema IV .....	56
	Teorema V .....	60
	Teorema VI .....	67
	Conclusión .....	72
	Bibliografía .....	75
	Indice .....	77









U.N.M.S.M. BIBLIOTECA CENTRAL



000000043980

Universidad Nacional Mayor de San Marcos  
Universidad del Perú, Decana de América